تحليل كثيرات الحدود:

الحد الجبري:

من أجل التعرف على كثير الحدود علينا أن نعرف معنى الحد الجبري وكيفية إجراء العمليات على الحدود الجبرية:

يتكون الحد الجبري من جداء عدد حقيقي بمتغير أو أكثر(نسمي العدد: معامل عددي، ونسمي المتغيرات: القسم الحرفي) .

أمثلة:

1) الحد الجبري : $5x$ ناتج عن ضرب العدد 5 بالمتغير x.
2) $3\,x^2$ حد جبري من الدرجة الثانية (لاحظ أنه ليس بالضرورة أن يكون أس المتغير مساوياً للعدد واحد فقد يكون أي عدد حقيقي آخر).
3) الحد الجبري $5xy$ معامله 5 وقسمه الحرفي xy .
4) الحد الجبري 5 نسميه الحد الثابت، لاحظ بأن أس القسم الحرفي يساوي الصفر.

العمليات على الحدود الجبرية:

1) **الجمع:** لجمع حدين جبريين (أو أكثر) لهما نفس القسم الحرفي نجمع المعامل العددي ونضع القسم الحرفي كما هو.
أمثلة:
- $2x+3x$ الحد الأول معامله العددي 2 وقسمه الحرفي x والحد الثاني معامله العددي 3 وقسمه الحرفي x لذلك نجمع المعاملين العددين $2+3=5$ ونضع القسم الحرفي x فيصبح الناتج $5x$.
- $3xy+4xy=7xy$ (ثلاثة أضعاف المقدار مضافاً إليه أربعة أضعاف المقدار يساوي سبعة أضعاف المقدار).
- $x^2y+14x^2y=15x^2y$ (عندما لا يذكر معامل للحد الجبري فإن معامله يساوي الواحد).

2) **الطرح:** بما أن الطرح هو جمع المعكوس فإن القاعدة السابقة تُطبق على الطرح.
أمثلة:
- $2x-3x$ الحد الأول معامله العددي 2 وقسمه الحرفي x والحد الثاني معامله العددي -3 وقسمه الحرفي x لذلك نجمع المعاملين العددين $2-3=-1$ ونضع القسم الحرفي x فيكون الناتج: $-x$
- $-3xy+4xy=1xy=xy$
- $-x^2y+14x^2y+3x^2y=16x^2y$.

3) **الضرب:** لضرب حدين جبريين (أو أكثر) نضرب المعامل العددي بالمعامل العددي والقسم الحرفي بالقسم الحرفي، سنستخدم خاصية القوى الآتية: $x^a.x^b.x^c=x^{a+b+c}$ (حيث a,b,c أعداد حقيقية).
أمثلة:
- $(2x^4)(3x^5)$ بضرب المعاملين العددين نحصل على $(2)(3)=6$ وبضرب الأقسام الحرفية نحصل على $x^4.x^5=x^{4+5}=x^9$ فيكون الناتج: $6x^9$.
- $(-8xy)(9x^{12})(-2x^3y^4)=(-8)(9)(-2)(x.x^{12}.x^3)(y.y^4)=144\,x^{16}\,y^5$

4) **القسمة(بشرط المقام لا يساوي الصفر):** لقسمة حدين جبريين (أو أكثر) نقسم المعامل العددي على المعامل العددي والقسم الحرفي على القسم الحرفي، سنستخدم خاصية القوى الآتية: $\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$ (حيث a,b أعداد حقيقية).
أمثلة:
- $\frac{12x^{14}}{6x^5}$ بقسمة المعاملين العددين نحصل على $\frac{12}{6}=2$ وبقسمة الأقسام الحرفية نحصل على $\frac{x^{14}}{x^5}=x^{14-5}=x^9$ فيكون الناتج: $2x^9$.
- $\frac{24x^{-2}y^6}{18x^{-3}y^2}=\frac{24}{18}\frac{x^{-2}}{x^{-3}}\frac{y^6}{y^2}=\frac{4}{3}\,x\,y^4$

- $\frac{x^{-12}}{x^6} = x^{-12+6} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ (تم استخدام خاصية القوى: $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ حيث a عدد حقيقي).

كثير الحدود:

كثير الحدود هو تركيب جبري يتكون من جمع أو طرح حدين جبريين أو أكثر.

مثلاً: التركيب الجبري $2x^3 - 5x + 5xy$ هو كثير حدود من الدرجة الثالثة بمجهولين ويتكون من ثلاثة حدود جبرية: الحد الأول: $2x^3$ ، الثاني: $-5x$ ، الثالث: $5xy$. (لاحظ أنه عندما تكون إشارة الحد + فإننا لا نكتبها عند ذكر الحد وأيضاً عندما يكون أس المتغير مساوياً للواحد فإننا لا نكتبه).

❖ وفق منهاج التاسع الأساسي هناك أربع طرق لتحليل كثير الحدود إلى جداء تراكيب جبرية وتختلف طريقة التحليل بحسب كثير الحدود.

الطريقة الأولى:

تحليل كثير الحدود باستخدام العامل المشترك الأعلى

- **العامل المشترك الأعلى لعدة أعداد:** هو أكبر عدد يمكننا أن نقسم الأعداد عليه بدون باقي قسمة، فمثلاً: العامل المشترك الأعلى للأعداد $6, 12, 36$ هو 6 .
- **العامل المشترك الأعلى لعدة أقسام حرفية من حدود جبرية:** هو حاصل ضرب المتغيرات المشتركة لتلك الأقسام بأصغر أس، **فمثلاً:** العامل المشترك الأعلى للأقسام الحرفية: x, x^2, x^5 هو x وأيضاً العامل المشترك الأعلى للأقسام الحرفية: xy, xy^3, x^2y هو xy .
- **العامل المشترك الأعلى لعدة حدود جبرية:** هو أكبر حد يمكننا أن نقسم الحدود عليه بدون باقي قسمة، **فمثلاً:** العامل المشترك الأعلى للحدود $15x^2y,\ 24\,x^2y^3\ ,18\,x^2y$ هو $3\,x^2y$ لأن العدد 3 هو العامل المشترك الأعلى للمعاملات $15, 24, 18$ و x^2y هو العامل المشترك الأعلى للأقسام الحرفية للحدود الثلاثة.

من أجل تحليل كثير الحدود إلى جداء تراكيب جبرية باستخدام العامل المشترك نقوم بإخراج العامل المشترك لتلك الحدود ونقسم الحدود عليه.

أمثلة: حلل كثير الحدود:

1) $12x^2 + 15x^6$

الحل(بالتفصيل): كثير الحدود السابق يتكون من حاصل جمع حدين جبريين هما $12x^2,\ 15x^6$ والعامل المشترك الأعلى لهذين الحدين هو: $3x^2$.

بقسمة الحد الأول على العامل المشترك الأعلى: $\frac{12x^2}{3x^2} = 4$ وبقسمة الحد الثاني: $\frac{15x^6}{3x^2} = 5x^{6-2} = 5x^4$

ومنه: $12x^6 + 15x^2 = 3x^2(4 + 5x)$

2) $20x^2y^7 - 25x^2y^4 + 15x^9y^2$

الحل: العامل المشترك الأعلى للحدود: $20x^2\ ^7,\ 25x^2y^4\ ,15x^9y^3$ هو $5x^2y^3$

ومنه: $20x^2y^7 - 25x^2y^4 + 15x^9y^2 = 5x^2y^3(4y^7 - 5y^4 + 3x^7)$

3) $3x^{12} + x^3y$

الحل: العامل المشترك الأعلى هو x^3 ومنه: $3x^{12} + x^3y = x^3(x^4 + y)$

4) $(x-1)x^4 + (x-1)\,y$

الحل: العامل المشترك الأعلى هو $(x-1)$ ومنه: $(x-1)x^4 + (x-1)\,y = (x-1)(x^4 + y)$

5) $4x^2+8x+8=4(x^2+2x+2)$

الطريقة الثانية:

تحليل كثير الحدود باستخدام التجميع

في بعض كثيرات الحدود لا يوجد عامل مشترك واضح بين الحدود جميعها بل قد يوجد بين كل حدين أو أكثر عامل مشترك، لذلك نقوم بتجميع الحدود التي لها عامل واحد بجانب بعضها ثم نخرج العامل خارج الحدود التي تشترك به.

فمثلاً: كثير الحدود x^3-x^2+x-1 لا يوجد بين جميع حدوده عامل مشترك واحد ولكن يوجد بين الحدين الأول والثاني عامل مشترك أعلى وهو x^2 نقوم بإخراجه فقط من الحدين السابقين فيصبح كثير الحدود بالشكل:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)$$

نلاحظ أنه أصبح لدينا حد مشترك وهو $x-1$ نقوم بإخراجه عامل مشترك، فيصبح الناتج:

$$x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+2)$$

أمثلة: حلل كثير الحدود:

1) x^3-x^2+1-x

الحل: نلاحظ عدم وجود عامل مشترك أعلى بين الحدود الأربعة ولكن هناك عامل مشترك أعلى بين الحدين الأول والثاني وهو x^2 نقوم بإخراجه فقط من الحدين السابقين فيصبح كثير الحدود بالشكل:

$$x^3-x^2+1-x=x^2(x-1)+(1-x)$$

نلاحظ وجود عاملين متشابهين هما $(1-x)$ و $(x-1)$ ونلاحظ أن كل منهما ناتج عن ضرب الآخر بالعدد -1

وبالتالي يمكن كتابة كثير الحدود السابق بالشكل:

$$x^2(x-1)+(1-x)=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)$$

2) x^2+6x+8

الحل: نلاحظ وجود عامل مشترك بين الحدين الأول والثاني ولكننا لن نستفيد من إخراجه، لذلك من لابد من التفكير بطريقة مختلفة:

لنجعل عدد الحدود أربعة بدل ثلاثة (بحيث يمكننا الاستفادة من إخراج عامل مشترك بين كل حدين ناتجين)، وذلك بتبديل $6x$ بـ $2x+4x$:

$$x^2+6x+8=x^2+2x+4x+8=x(x+2)+4(x+2)=(x+2)(x+4)$$

الطريقة الثالثة:

تحليل كثير الحدود باستخدام المتطابقات التربيعية

تذكير بالمتطابقات التربيعية الثلاثة:

الأولى: مربع مجموع مقدارين　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

الثانية: مربع فرق مقدارين　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

الثالثة: فرق مربعي مقدارين　$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

أمثلة: حلل كثير الحدود:

1) x^2-4

الحل: بجذر الحد الأول ينتج: $\sqrt{x^2}=x$ وبجذر الحد الثاني نجد: $\sqrt{4}=2$ ، بحسب المتطابقة الثالثة ينتج:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

2) x^3-x

الحل: إن x هو عامل مشترك بين الحدين السابقين، بالتالي: $x^3-x=x(x^2-1)$

نلاحظ أن الناتج يحوي متطابقة (المتطابقة الثالثة)، ومنه: $x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

3) x^2+6x+9

الحل: لدينا كثير حدود من الدرجة الثانية نرجعه إلى المتطابقة الأولى ((مربع فرق مقدارين = مربع الأول +ضعفي الأول في الثاني + مربع الثاني)).

$$x^2+6x+9=x^2+2(3)x+3^2=(x+3)^2$$

4) $2x^3-12x^2+18x$

الحل: للحدود الثلاثة عامل مشترك أعلى وهو $2x$ نخرجه ثم نستخدم المتطابقة الثانية:

$$2x^3-12x^2+18x=2x(x^2-6x+9)=2x(x-3)^2$$

الطريقة الرابعة:

تحليل كثير الحدود بالطريقة المباشرة

لتحليل كثير الحدود من الشكل x^2+bx+c (بحيث a,b عددان حقيقيان) نبحث عن عددين x_1,x_2 مجموعهما b وجداؤهما c ثم نعوض في الشكل: $(x+x_1)(x+x_2)$

أمثلة: حلل كثير الحدود

1) $x^2+9x+20$

الحل: نبحث عن عددين مجموعهما 9 وجداؤهما 20 ، نجرب أعداد تحقق الشرطين السابقين معاً مع الانتباه إلى الإشارات: فنجد أن العددين المطلوبين هما 5 و 4 نعوض في الشكل: $(x+x_1)(x+x_2)$ فينتج:

$$x^2+9x+20=(x+5)(x+4)$$

2) $3x^3-18x^2-21x$

الحل: نلاحظ وجود عامل مشترك أعلى بين الحدود الثلاثة وهو $3x$ ، بإخراجه ينتج:

$$3x^3-18x^2-21x=3x(x^2-6x-7)$$

نقوم بتحليل ما بين القوسين بالطريقة المباشرة وذلك بالبحث عن عددين مجموعهما -6 وجداؤهما -7 نجد أنهما $-7\,,1$ وبالتالي:

$$3x^3-18x^2-21x=3x(x^2-6x-7)=3x\,(x-7)(x+1)$$

معلومات إضافية حول كثيرات الحدود:

- يتم بناء كثير الحدود باستخدام عمليات الجمع والطرح والضرب والأسس الطبيعية.

فمثلاً: التركيب الجبري: $x^2-\frac{2}{x}+x$ ليس كثير حدود لأن الحد الثاني يتضمن قسمة على المتغير x ،

وأيضاً التركيب الجبري: $2\,x^{\frac{2}{5}}+xy+x^2$ ليس كثير حدود لأن الحد الأول يحتوي على أس ليس طبيعي.

- تترجم كلمة متعددة الحدود(كثير الحدود) إلى اللغة الإنجليزية بكلمة Polynomial. تتكون هذه الكلمة من جزئين هما *Poly* و nomial. الجزء الأول: Poly هي كلمة إغريقية الأصل وتعني متعدد، والجزء الثاني: nomial هي لاتينية الأصل. وأول من أدخل هذا المصطلح المركب إلى اللغة اللاتينية هو فرانسوا فييت. (المصدر : ويكيبيديا)