

الفصل الأول

التحليل التوافقي

مقدمة

كثيراً ما نهتمُّ في مجال الدراسات الاقتصادية والاجتماعية بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعات أصلية وفق شروط محددة مُفترضة، كالاهتمام بطبيعة الأشياء، أو العناصر وترتيبها في الوقت نفسه. كما يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها بعضاً بافترض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية، أو بإمكانية تكرارها ويساعدنا في دراسة ذلك ما يسمّى بالتحليل التوافقي.

التحليل التوافقي

يهتمُّ التحليل التوافقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضياتية التي تسهل هذا التكوين من جهة وتمكّن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية (الملائمة) وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوافقي؛ لهذا تتجلى ضرورة عرض تلك القواعد الرياضياتية للاستفادة منها عند التطرق لموضوع الاحتمال وقوانينه. وعليه فإننا سنتناول في إطار هذا الفصل الموضوعات التالية:

- الترتيب،

- التوافق.

وقبل التطرق إلى هذين الموضوعين المشكلين لهذا الفصل، لابد من الإشارة إلى نقطتين أساسيتين تشكلان المرتكز الحقيقي للتحليل التوافقي، وهما مبدأ المجموع وحاصل الضرب.

مبدأ المجموع

إذا كانت A_1, \dots, A_k مجموعات منتهية ومنفصلة متنى متنى $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k|$$

يسمّى هذا المبدأ مبدأ المجموع.

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

يمكن إثبات مبدأ المجموع بواسطة الاستقراء الرياضي على k . غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ المجموع عند حل المسائل:

"إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز أي من المهمّات A_1, \dots, A_k وإذا كان لا يمكن إنجاز A_i و A_j في الوقت نفسه لكل $i \neq j$ وكان عدد طرق إنجاز A_i هو n_i لكل عدد طبيعي $1 \leq i \leq k$ ، فإنّ عدد طرق إنجاز المهمة A هو $n_1 + \dots + n_k$ طريقة."

مبدأ حاصل الضرب

إذا كانت A_1, \dots, A_k مجموعات منتهية فإنّ:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$$

يسمّى هذا المبدأ مبدأ حاصل الضرب. ويمكن بطبيعة الحال إثبات هذا المبدأ وذلك بواسطة الاستقراء الرياضي على k .

غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ حاصل الضرب عند حل المسائل:

"إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز المتتالية التالية من المهمّات A_1, \dots, A_k (المهمة A_1 أولاً ثمّ المهمة A_2 ثانياً وهكذا) وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لا يعتمد على الكيفية التي تمّ بها إنجاز المهمّات A_1, \dots, A_{j-1} لكل عدد طبيعي $2 \leq j \leq k$ ، وكان عدد طرق إنجاز المهمة A_i هو n_i لأجل كل $1 \leq i \leq k$ ، فإنّ عدد طرق إنجاز المهمة A هو $n_1 \times \dots \times n_k$ طريقة."

مثال 1

لتكن Σ أبجدية عدد حروفها m . جد عدد عناصر Σ_n . حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات المشكلة من n حرفاً والتي حروفها من الأبجدية Σ .

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

حل

لتكن $\Omega = \omega_1 \dots \omega_n$ كلمة من Σ_n . ويمثل ω_i الحرف ذو المرتبة i في الكلمة Ω من الأبجدية Σ لأجل كل i من $\{1, \dots, n\}$.

عدد طرق اختيار الحرف ω_i هو m طريقة لكل $1 \leq i \leq n$ ، كما أنّ اختيار الحرف ω_i لا يعتمد على اختيار الحروف التي قبله. إذن استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب نجد $|\Sigma_n| = m^n$ وهو المطلوب.

مثال 2

يعمل في مستشفى أربع أطباء وسبع مرضين وثلاث فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفني؟

حل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق ويمكن اختيار الممرض بسبع طرق وأخيراً يمكن اختيار الفني بثلاث طرق. استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب عدد الطرق الممكنة هو $4 \times 7 \times 3 = 84$ طريقة.

مثال 3

كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عدداً فردياً؟

حل

ليكن y هو رقم الأحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x . يمكن اختيار x من المجموعة $\{1, 2, \dots, 9\}$ لا نختار الرقم 0 لأنه ليس رقماً معبراً عندما يكون على يسار أي عدد ومهما كان عدد هذه الأصفار وفي هذا التمرين اشترط أن تكون هذه الأعداد مكونة من رقمين معبرين.

إذن عدد طرق اختيار الرقم x هو تسع طرق. ونلاحظ أنه إذا كان x فردياً فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ، أما إذا كان x زوجياً فإنه يمكن

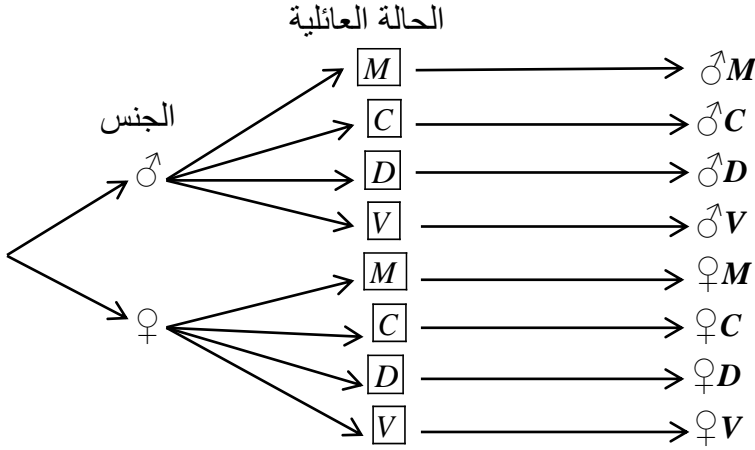
الفصل الأول

التحليل التوافيقي

اختيار y من المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ وبالتالي فإنّ عدد طرق اختيار y بعد x هو 5. إذن عدد الأعداد المطلوبة هو $9 \times 5 = 45$ عددًا.

مثال 4

لنفترض أننا نودّ تصنيف مجتمع ما وفق الجنس (ذكر ♂، أنثى ♀) والحالة العائلية (متزوج M ، أعزب C ، مطلق D ، أرمل V) فعدد الأصناف المختلفة وفق السميتين هو $2 \times 4 = 8$ وهذا ما تعكسه الشجرة الموالية:



نلاحظ أنّه لدينا فرعان في المرحلة الأولى وهذا تماشيًا مع أنماط الصفة (الجنس)، في حين أنّ المرحلة الثانية لها أربع فروع وهذا تماشيًا مع أنماط الصفة (الحالة العائلية).

مثال 5

في إحدى الشركات الحديثة النشأة توجد وظيفتان شاغرتان لرئيس مصلحة الموظفين ومحاسب، تقدم للوظيفة الأولى خمسة أشخاص وللثانية ثلاثة أشخاص. فيكون عدد الطرق للتعيين في الوظيفتين الشاغرتين كالتالي:

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

خمس طرق لشغل وظيفة رئيس مصلحة الموظفين، وتوجد ثلاث طرق لشغل وظيفة محاسب وذلك من أجل كل طريقة من الطرق الخمسة السابقة فنجد حسب مبدأ حاصل الضرب أنّ عدد الطرق هو $5 \times 3 = 15$ طريقة لشغل هاتين الوظيفتين الشاغرتين.

تمرين 1

قررت وزارة الداخلية تمييز سياراتها من خلال وضع ترقيم خاص بها ويتمثل هذا الأخير في حرفين مختلفين (Z, \dots, A) تتبعها ثلاثة أرقام من $\{0, 1, \dots, 9\}$ بحيث لا يكون الرقم الأوّل صفرًا. فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعها لهذه السيارات؟.

حل

باعتبار عدد الحروف من اللغة اللاتينية 26 حرفًا فإنّ الحرف الأوّل يمكن اختياره بـ 26 طريقة، والحرف الثاني يمكن اختياره بـ 25 طريقة، أمّا الرقم الأوّل فيمكن اختياره بـ 9 طرق (باعتبار تواجد الصفر في البداية أمرٌ مستبعد) والرقم الثاني يمكن اختياره بـ 10 طرق والرقم الثالث يمكن اختياره بـ 10 طرق أيضًا وذلك من أجل كل طريقة من الطرق السابقة. وبالتالي فإنّ عدد اللوحات التي يمكن طبعها للسيارات الخاصّة بوزارة الداخلية هو:

$$26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$$

لوحة.

التمرين 2

يوجد بمعهد الاقتصاد ثلاثة أقسام: قسم الشعبة العامّة، قسم التخصص، وقسم تقني سامي، وبهذه الأقسام 224، 112، 82، طالب على التوالي ونريد اختيار ممثل لكل قسم لينظّم إلى مجلس إدارة المعهد بكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الممثلين للطلاب؟.

الفصل الأول

التحليل التوافقي

حل

يمكن اختيار ممثل قسم الشعبة العامّة بـ 224 طريقة، وممثل التخصص بـ 112 طريقة وأخيراً ممثل تقني سامي بـ 82 طريقة، وبالتالي وارتكازاً على مبدأ حاصل الضرب توجد $224 \times 112 \times 82 = 2057216$ طريقة لاختيار مجموعة ممثلي هذه الأقسام الثلاثة.

مبدأ التقابل

إذا كان $f: A \rightarrow B$ تقابلاً من مجموعة A إلى مجموعة B فإن $|A| = |B|$.

نموذج العينة للعد

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة ذات n عنصراً. إنّ أخذ عينة من A يعتمد على

الإجابة على السؤالين التاليين:

الأول: هل ترتيب العناصر مهمٌ في هذه العينة أم لا؟

الثاني: هل تكرار ظهور عنصر في العينة مقبول أم لا؟

إنّ لدينا أربع حالات، يوضحها المثال التالي، سنتحدث عن كل منها.

مثال

لنعتبر المجموعة التالية $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

يوضح الجدول المعطى أدناه العينات المكونة من عنصرين والمأخوذة من A

	التكرار مقبول	التكرار غير مقبول
الترتيب مهم	$(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3)$ $(a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3)$ $(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)$	$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1)$ $(a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2)$
الترتيب غير مهم	$[a_1, a_1], [a_1, a_2], [a_1, a_3]$ $[a_2, a_2], [a_2, a_3], [a_3, a_3]$	$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$

الفصل الأول

التحليل التوافقي

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة ما ذات n عنصرًا. نسَمّي العينة "ترتيبية بتكرار من الرتبة r من A " (يمكن لـ r يكون أن أكبر من n) إذا كان يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل: (x_1, \dots, x_r) بمناقشة مماثلة لما فعلنا في المثال (1) يمكن إثبات أن عدد الترتيبات بتكرار من الرتبة r من n والذي نرمز له بالرمز $A_{R_n}^r$ هو n^r . أي:

$$A_{R_n}^r = n^r$$

ونسَمّي العينة "ترتيبية من الرتبة r من A " ($0 \leq r \leq n$) إذا كان لا يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل: (x_1, \dots, x_n) مع $x_i \neq x_j$ لكل $i \neq j$ حيث (i, j) تنتمي إلى $(\{1, \dots, n\})^2$.

مبرهنة

عدد الترتيبات من الرتبة r من n هو:

$$\begin{aligned} A_n^r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n(n-1) \cdots (n-r+1) \end{aligned}$$

إثبات

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة ذات n عنصرًا ولتكن (x_1, \dots, x_n) ترتيبية من

الرتبة r من A . نلاحظ أن:

1- عدد طرق اختيار x_1 هو n

2- عدد طرق اختيار x_2 هو $n-1$

3- عدد طرق اختيار x_3 هو $n-2$

⋮

r - عدد طرق اختيار x_r هو $n-r+1$

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

وحيث أنّ الاختيارات مستقلة في كل مرحلة، فحسب مبدأ حاصل الضرب يكون عدد الترتيبات من الرتبة r من n هو العدد $n(n-1)\dots(n-r+1)$.

نسمّي الترتيبات من الرتبة n من A تبديلة من A وكذا نرسم لعدد التبديلات من الرتبة n بالرمز P_n وتكون $P_n = n!$.

نسمّي "توفيقاً من الرتبة r من A " ($0 \leq r \leq n$) كل مجموعة جزئية من A ذات r عنصراً. أي هي كل عينة من A سعتها r الترتيب فيها غير مهم ولا يسمح فيها بالتكرار.

نرسم لها كما هو معروف بـ $\{x_1, \dots, x_r\}$.

مبرهنة

عدد التوفيقات من الرتبة r من n هو:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

إثبات

إذا كان $0 = r$ فإنّ المجموعة الجزئية الخالية هي الوحيدة التي لا تحوي أي عنصر.

لنفترض إذن أنّ $0 < r$. لاحظ أنّ أيّ مجموعة جزئية عدد عناصرها r تقابل $r!$ ترتيبات من الرتبة r من A .

كذلك يمكننا الحصول على $r!$ ترتيبات من الرتبة r من A مختلفة من أيّ مجموعة جزئية من A عدد عناصرها r . وبناءً عليه فإنّ:

$$A_n^r = C_n^r \times r!$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} C_n^r &= \frac{1}{r!} A_n^r \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

مثال 5

إذا كانت ورقة اختبار تحوي سبعة أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن خمسة أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب على الاختبار؟.

جواب

عدد طرق الإجابة هو $C_7^3 = 21$.

مثال 6

يعمل 12 مهندساً في شركة، ومن أجل تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

(أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

(ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصرّ مهندسان على العمل معاً؟

(ج) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملوا معاً؟

حل

(أ) عدد الطرق الممكنة هو $C_{12}^5 = 792$.

(ب) لنشر b و a إلى المهندسان اللذان يصّرّان على العمل معاً. إذا كان a و b ضمن الفريق المختار فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو C_{10}^3 ، أمّا إذا كان الفريق المختار لا يتضمن كلياً من a و b فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو C_{10}^5 . إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أنّ عدد الطرق الممكنة هو $C_{10}^3 + C_{10}^5 = 120 + 252 = 372$ طريقة.

(ج) بالاحتفاظ بنفس الترميز السابق يمكننا القول أنّه إذا كان a ضمن الفريق المختار فإنّ b ليس ضمن الفريق وبالتالي فإنّ عدد الطرق في هذه الحالة هو

C_{10}^4 . بالمثل إذا كان b ضمن الفريق المختار فإنّ عدد الطرق هو C_{10}^4 .

أمّا إذا كان الفريق لا يتضمن كلياً من a و b فإنّ عدد الطرق هو C_{10}^5 .

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أنّ عدد الطرق الممكنة هو:

$$C_{10}^4 + C_{10}^4 + C_{10}^5 = 2 \times 210 + 252 = 672$$

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة ذات n عنصراً. نسمّي "توافيقة بتكرار من الرتبة r من A " كلّ عينة من A سعتها r (يمكن لـ r أن يكون أكبر من n) الترتيب فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار ونكتبها على الشكل $[x_1, \dots, x_n]$. وفقاً لما ذكر أعلاه فإنّ $[a, a, b, c, c, c, d]$ توافيقة بتكرار من الرتبة 7 من أي مجموعة A تحوي المجموعة $\{a, b, c, d\}$. وفيها تكرار كل من d, c, b, a يساوي 1, 3, 1, 2 على الترتيب.

مثال

التوافيقات بتكرار من الرتبة 3 من $\{a, b\}$ هي:

$$[a, a, a], [a, a, b], [a, b, b], [b, b, b]$$

مبرهنة

عدد التوافيقات بتكرار من الرتبة r من n هو:

$$K_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

إثبات

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة من n عنصراً. لكل توافيقة بتكرار من الرتبة r من A ، نكوّن جدولاً مكوّناً من n عموداً وسطرين. نضع في مستطيلات السطر الأوّل من اليسار إلى اليمين العناصر a_1, \dots, a_n على الترتيب، ولكل i من $\{1, \dots, n\}$ نضع في المستطيل أسفل a_i نجوماً عددها يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في هذه التوافيقة بالتكرار من الرتبة r من A . نلاحظ أنّ عدد النجوم

الفصل الأوّل

التحليل التوفيقي

في مستطيلات السطر الثاني يساوي r . فمثلاً التوفيقية بتكرار $[a_1, a_1, a_1, a_3]$ من المجموعة $\{a_1, a_2, a_3\}$ يقابلها الجدول التالي:

a_1	a_2	a_3
***		*

وبالعكس، أي جدول عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني فيه r تقابله توفيقية بتكرار من الرتبة r من A وعليه يوجد تقابل بين التوفيقيات بتكرار والجدول. لحساب عدد الجداول تجري التغيير التالي على الجدول:

"نحذف الخطوط الأفقية الثلاثة كما نحذف العناصر من الصفّ الأوّل والخطيين الرأسيين الأوّل والأخير من الجدول". فمثلاً الجدول السابق يصبح بعد التغيير إلى هذه الشفرة $***||**$ وبالعكس التشفير $***||**$ يقابل التوفيقية بتكرار التالية

$[a_2, a_2, a_3, a_3]$. إذن استناداً إلى مبدأ التقابل يكون عدد التوفيقيات بتكرار من الرتبة r من n مساوياً لعدد التشكيلات لـ r نجمة و $n-1$ خطأ رأسيًا. ولحساب هذا العدد نلاحظ أنّه لدينا $n+r-1$ مكاناً، إذا اخترنا r مكاناً للنجوم فستكون الأماكن الأخرى المتبقية للخطوط الرأسية. وحيث أنّ عدد طرق اختيار r مكاناً من $n+r-1$ مكاناً هو C_{n+r-1}^r فإنّ عدد التوفيقيات بتكرار من الرتبة r من n هو

$$. K_n^r = C_{n+r-1}^r$$

خواص مهمة

$$، C_n^r = C_n^{n-r} \quad (1)$$

$$(r \neq n) ، C_n^r = \frac{n}{n-r} C_{n-r}^r \quad (2)$$

$$، C_n^n = C_n^0 = 1 \quad (3)$$

$$، C_n^{n-1} = C_n^1 = n \quad (4)$$

$$، A_n^r = r! C_n^r \quad (5)$$

$$، A_n^0 = C_n^0 = 1 \quad (6)$$

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

$$A_n^n = A_n^{n-1} = n! = P_n \quad (7)$$

مبرهنة (متطابقة الكرجي وباسكال)

من أجل كل عددين طبيعيين يحقّقان $n > k \geq 1$ فإنّ المطابقة التالية محقّقة:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

إثبات

لتكن $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ مجموعة عدد عناصرها n . ولتكن B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k ($1 \leq k < n$). نميّر حالتين: إمّا أن تكون a_n تنتمي إلى B أو لا تنتمي إلى B . حسب مبدأ المجموع فإنّ عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا يساوي عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا والتي لا تحوي a_n مضافًا إليه عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا والتي تحوي a_n . عدد المجموعات الجزئية الأولى يساوي عدد المجموعات الجزئية من $A \setminus \{a_n\}$ ذات k عنصرًا، إذن يساوي C_{n-1}^k ، في حين يساوي عدد المجموعات الجزئية الثانية عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ذات $k-1$ عنصرًا، إذن يساوي C_{n-1}^{k-1} وعليه $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

دستور ثنائي الحد

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ، وأي عدد طبيعي n فإنّ:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} \quad (*)$$

إثبات

نستدل بالتراجع على n . المبرهنة صحيحة عندما $n=0$ لأنّ الطرف الأيسر يساوي $(x+y)^0 = 1$ ، كما أنّ الطرف الأيمن يساوي $C_0^0 x^0 y^0 = 1$. لنفترض الآن أنّ العلاقة (*) تظل قائمة إلى غاية رتبة ما k ، أي أنّ:

الفصل الأول

التحليل التوافقي

$$(x+y)^k = C_k^0 y^k + C_k^1 xy^{k-1} + C_k^2 x^2 y^{k-2} + \dots + C_k^k x^k$$

ولنثبت أنّ هذه الأخيرة تبقى سارية من أجل الرتبة التي تليها أي $k+1$ نريد إذن إثبات صحة المساواة التالية:

$$(x+y)^{k+1} = C_{k+1}^0 y^{k+1} + C_{k+1}^1 xy^k + C_{k+1}^2 x^2 y^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{k+1} x^{k+1}$$

نلاحظ أنّ

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$$

ومن فرضية التراجع نجد

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= (x+y) \left[C_k^0 y^k + C_k^1 xy^{k-1} + C_k^2 x^2 y^{k-2} + \dots + C_k^k x^k \right] \\ &= C_k^0 xy^k + C_k^1 x^2 y^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} x^k y + C_k^k x^{k+1} + C_k^0 y^{k+1} + \\ &\quad + C_k^1 xy^k + \dots + C_k^{k-1} x^{k-1} y^2 + C_k^k x^k y \\ &= C_k^0 y^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) xy^k + \dots + (C_k^k + C_k^{k-1}) x^k y + C_k^k x^{k+1} \\ &= C_{k+1}^0 y^{k+1} + C_{k+1}^1 xy^k + \dots + C_{k+1}^k x^k y + C_{k+1}^{k+1} x^{k+1} \end{aligned}$$

علمًا أننا حصلنا على المساواة الأخيرة باستخدام متطابقة الكرجي وباسكال نلاحظ أنّ عدد الحدود المختلفة في تفكيك $(x+y)^n$ يساوي $n+1$.

مثال 1

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (-1)^{n-k} y^{n-k}$$

لاحظ أنّ 2^n هو عدد كل أجزاء أي مجموعة ذات n عنصرًا.

مثال 2

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

من أجل كل n من \mathbb{N}^* .

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

مبرهنة

إذا كان لدينا n من العناصر المأخوذة من k نوعاً بحيث عدد العناصر المأخوذة من النوع رقم i هو r_i لكل i من $\{1, \dots, k\}$ ، فإنّ عدد تشكيلات هذه العناصر

$$\text{يساوي } \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}.$$

إثبات

لدينا n مكاناً للعناصر من النوع الأول والتي عددها r_1 يمكن أن نختار r_1 مكاناً من n مكاناً بـ $C_n^{r_1}$ طريقة.

أما العناصر من النوع الثاني والتي عددها r_2 يمكن أن نختار r_2 مكاناً من $n - r_1$ مكاناً بـ $C_{n-r_1}^{r_2}$ طريقة بعد اختيار r_1 مكان من n مكان. وعموماً للعناصر من

النوع رقم i والتي عددها r_i يمكن أن نختار r_i مكاناً من $n - (r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1})$ مكاناً بـ $C_{n-(r_1+r_2+\dots+r_{i-1})}^{r_i}$ طريقة، لكل i من $\{2, \dots, k\}$. ومن مبدأ حاصل الضرب ينتج المطلوب.

مثال

كم عدد الكلمات الممكنة تشكيلها (أو تكوينها) من حروف كلمة $ABACDDEFA$ ؟

الجواب

$$\text{عدد الكلمات هو: } \frac{9!}{3! \times 2! \times 1!} = 30240 \text{ كلمة.}$$

نموذج التوزيع للعد

يهدف هذا البند إلى تقديم نموذج التوزيع للعد. لدينا r كرة نريد توزيعها على n صندوقاً، ثلاثة أسئلة مهمّة في هذا السياق:
الأول: هل الكرات مختلفة أم متطابقة؟

الفصل الأول

التحليل التوفيقي

الثاني: هل من الممكن أن يحوي الصندوق أكثر من كرة؟

الثالث: هل الصناديق مختلفة أم متطابقة؟

في هذا البند سنفترض أنّ الصناديق مختلفة. إذن لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي:

مثال

يوضح الجدول التالي كل التوزيعات الممكنة لكرتين على ثلاثة صناديق مختلفة.

	لا شروط على عدد الكرات في كل صندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$[b_1b_2]$ [] []	$[b_1]$ $[b_2]$ []
	[] $[b_1b_2]$ []	$[b_1]$ [] $[b_2]$
	[] [] $[b_1b_2]$	$[b_2]$ [] $[b_1]$
	$[b_1]$ $[b_2]$ []	$[b_2]$ $[b_1]$ []
	$[b_1]$ [] $[b_2]$	[] $[b_1]$ $[b_2]$
	$[b_2]$ $[b_1]$ []	[] $[b_2]$ $[b_1]$
	$[b_2]$ [] $[b_1]$	
	[] $[b_1]$ $[b_2]$	
[] $[b_2]$ $[b_1]$		
الكرات متطابقة	$[bb]$ [] []	$[b]$ $[b]$ []
	[] $[bb]$ []	$[b]$ [] $[b]$
	[] [] $[bb]$	[] $[b]$ $[b]$
	$[b]$ $[b]$ []	
	$[b]$ [] $[b]$	
	[] $[b]$ $[b]$	
	[] [] []	

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

ليكن لدينا توزيع لـ r كرة مختلفة $\{b_1, \dots, b_r\}$ على n صندوق من الصناديق المختلفة $\{a_1, \dots, a_n\}$.

نكوّن ترتيبية بتكرار (x_1, \dots, x_r) من الرتبة r من المجموعة $\{a_1, \dots, a_n\}$ مستخدمين التوزيع المعطى كما يلي:

x_i هو الصندوق الذي يحوي الكرة b_i لكل i من $\{1, \dots, r\}$.

وبالعكس، إذا كانت (x_1, \dots, x_r) ترتيبية بتكرار من الرتبة r من مجموعة

الصناديق $\{a_1, \dots, a_n\}$ فإننا نكوّن توزيعاً للكرات المختلفة $\{b_1, \dots, b_r\}$ على الصناديق مستخدمين التوزيع التالي:

نضع الكرة b_i في الصندوق x_i لكل i من $\{1, \dots, r\}$.

وعليه، توزيعات r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة تقابل الترتيبات بتكرار من الرتبة r من n .

وبالمثل يمكن توضيح أنّ توزيعات r كرة مختلفة $\{b_1, \dots, b_r\}$ على n من

الصناديق المختلفة $\{a_1, \dots, a_n\}$ والتي لا يحوي فيها صندوق أكثر من كرة تقابل

الترتيبات من الرتبة r من المجموعة $\{a_1, \dots, a_n\}$. وعليه، حسب ما سبق ينتج أنّ:

مبرهنة

(1) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n صندوقاً مختلفاً يساوي:

$$A_n^r = n^r$$

(2) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة واحدة، يساوي:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

لتكن لدينا r كرة متطابقة موزعة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, \dots, a_n\}$. لكل توزيع نأخذ عينة $[x_1, \dots, x_r]$ من المجموعة $\{a_1, \dots, a_n\}$ الترتيب فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار وسعتها r حيث x_1, \dots, x_r هي الصناديق التي تحوي الكرات.

وبالعكس، كل عينة $[x_1, \dots, x_r]$ سعتها r من المجموعة $\{a_1, \dots, a_n\}$ لا يكون فيها الترتيب مهمًا ويسمح فيها بالتكرار تقابل توزيعًا لكرات متطابقة عددها r على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, \dots, a_n\}$ كما يلي:

نوزع الكرات بحيث يكون عدد الكرات في الصندوق a_i يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في العينة $[x_1, \dots, x_r]$. وعليه، يوجد تقابل بين توزيعات r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, \dots, a_n\}$ والعينات التي سعتها r والتي لا يكون فيها الترتيب مهمًا والمأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n . لاحظ أنّه إذا كان كل صندوق يحوي كرة على الأكثر، فإنّ العينات في هذه الحالة تكون مجموعات. أمّا إذا لم يكن هناك شروط على عدد الكرات في الصناديق فإنّ العينات في هذه الحالة تكون توافيقات بتكرار. من ذلك وما سبق نستنتج أنّ:

مبرهنة

(1) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة يساوي:

$$K_n^r = C_{n+r-1}^r$$

(2) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لنلخص ما توصلنا إليه:

الفصل الأوّل

التحليل التوافقي

نموذج العينة للعد

	التكرار مقبول	التكرار غير مقبول
الترتيب مهم	ترتيبات بتكرار $A_n^r = n^r$	ترتيبات $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
الترتيب غير مهم	توفيقات بتكرار $K_n^r = C_{n+r-1}^r$	توفيقات $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

خواص مهمّة

$$C_n^r = C_n^{n-r} \quad (1)$$

$$(r < n) \quad C_n^r = \frac{n}{n-r} C_{n-1}^r \quad (2)$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1 \quad (3)$$

$$C_n^{n-1} = C_n^1 = n \quad (4)$$

$$(1 \leq r < n) \quad C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \quad (5)$$

$$A_n^r = r! C_n^r \quad (6)$$

$$A_n^0 = C_n^0 = 1 \quad (7)$$

$$A_n^n = A_n^{n-1} = n! = P_n \quad (8)$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (9)$$

الفصل الأوّل

التحليل التوافيقي

نموذج التوزيع للعد

عدد الصناديق هو n عدد الكرات هو r	لا شروط على عدد الكرات في الصندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$A_n^r = n^r$	$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
الكرات متطابقة	$K_n^r = C_{n+r-1}^r$	$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مصطلحات مهمّة في السحب

"السحب بدون إرجاع": التكرار غير مقبول.

"السحب بإرجاع": التكرار مقبول.

"السحب تلو الأخرى": الترتيب مهم.

"السحب دفعة واحدة": الترتيب غير مهم.