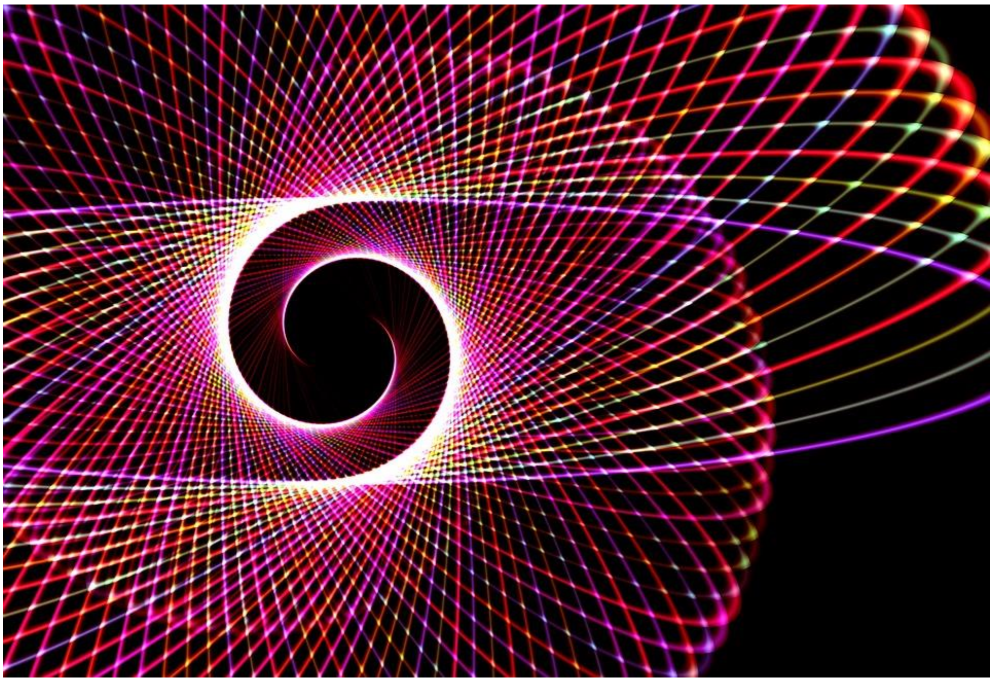
مذكرة محاضرات في الاهتزازات الميكانيكية 2

Lecture Notes in Mechanical Vibrations 2



إعداد

دكتور مهندس/ أسامة محمد المرضي سليمان خيال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة – السودان

فبراير 2019م

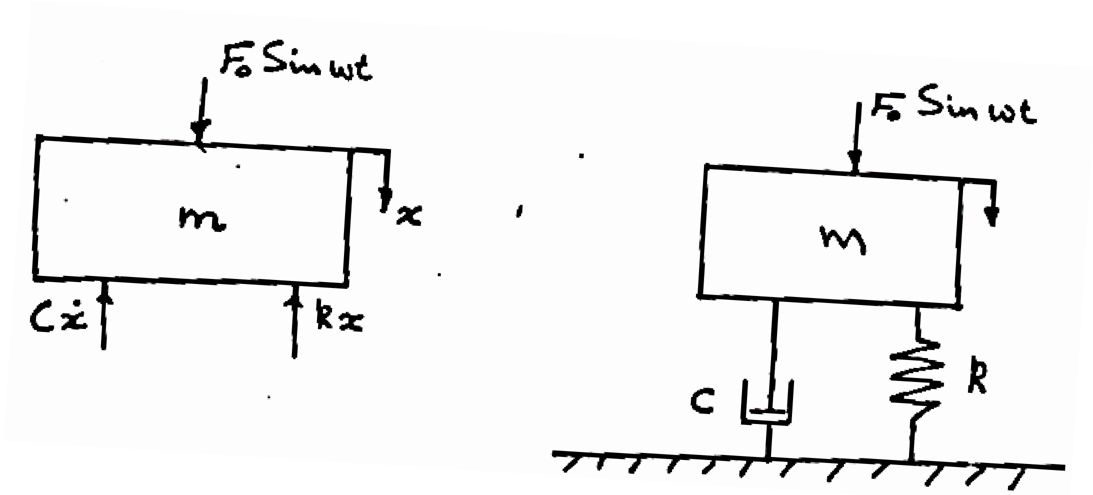
الفصل الخامس

الاهتزاز القسري

(Forced Vibration)

5.1 مدخل:

عندما يكون الاهتزاز ناجم من قوة خارجية يُسمى اهتزاز قسري. إذا كانت قوة الإثارة أو الاضطراب المسلَّطة على الجهاز توافقية، فإنَّ الجهاز يهتز بذبذبة مساوية لذبذبة القوة. ومن مصادر القوى التوافقية عدم الاتزان في الأجزاء الدوارة في الآلات، والقوى الناتجة من الحركة الترددية. هذه الإثارة قد لا تكون مرغوبة في الأجهزة المتصلة بهذه الآلات والتي يتأثر أداؤها، بالإضافة إلى أنَّه ضار للإنشاء إذا كانت سعة الحركة كبيرة. كما يجب تفادى الرنين في معظم الحالات، ولتفادي نشوء سعات حركة كبيرة، كثيراً ما تستخدم المخمِّدات وماصَّات الاهتزاز. ودراسة سلوك هذه الأجهزة مهم لكى تؤدى دورها بكفاءة عالية. الإثارة التوافقية يمكن أن تكون على شكل قوة أو إزاحة لنقطة ما في الجهاز. سنركز في البداية على جهاز له درجة واحدة من الحرية ومزود بمضائل لزج كما في الرسم أدناه.



معادلة الحركة:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

ويمكن كتابتها هكذا،

$$\ddot{x} + 2\xi p\dot{x} + p^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

حل هذه المعادلة يتكون من جزئين، الحل التكميلي وينتج من المعادلة الصفرية، والحل الخاص.

الحل التكميلي في هذه الحالة هو حل الاهتزاز الحر المتضائل الذى ورد ذكره في الفصل السابق.

والحل الخاص يمثل الحالة المستقرة، ويمكن أن نفترضه هكذا،

$$x = X\sin(\omega t - \phi)$$

حيث أنَّ X هى سعة الحركة و ϕ زاوية الطور للإزاحة مقارنة مع قوة الإثارة. ولإيجاد سعة الحركة وزاوية الطور يتم تعويض الحل المفترض في معادلة الحركة

$$\dot{x} = X\omega\cos(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = -X\omega^2\sin(\omega t - \phi)$$

$$-X\omega^2\sin(\omega t - \phi) + 2\xi p\omega x\cos(\omega t - \phi) + p^2 X\sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

نعوِّض،

$$\omega t - \phi = \frac{\pi}{2}$$

لنحصل على،

$$\left(p^2 - \omega^2\right)X = \frac{F_0}{m}\cos\phi \qquad (1)$$

نعوِّض،

$$\omega t - \phi = 0$$

لنحصل على،

$$2\xi p\omega X = \frac{F_0}{m}\sin\phi \qquad (2)$$

ربِّع كلٍ من المعادلتين (1) ،(2) ثم أجمعهما لنحصل على،

$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(p^2-\omega^2\right)^2+\left(2\xi p\omega\right)^2}}$$

وهذه يمكن إعادة كتابتها بعد قسمة العلوي والسفلي على P^2 كما يلى

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

حيث أنَّ، $X_0 = \frac{F_0}{k}$ و $r = \frac{\omega}{p}$

لاحظ ان X_0 هي الانحراف الاستاتيكى الناجم من تسليط الحمل F_0، وعليه فإنَّ الحد على يمين المعادلة هو عامل التكبير وسنرمز له بـ μ ، أي أنَّ،

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\xi r\right)^2}}$$

وبقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل زاوية الطور،

$$\tan\phi = \frac{2\xi p\omega}{p^2-\omega}$$

والتي يمكن كتابتها كما يلى،

$$\tan\phi = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

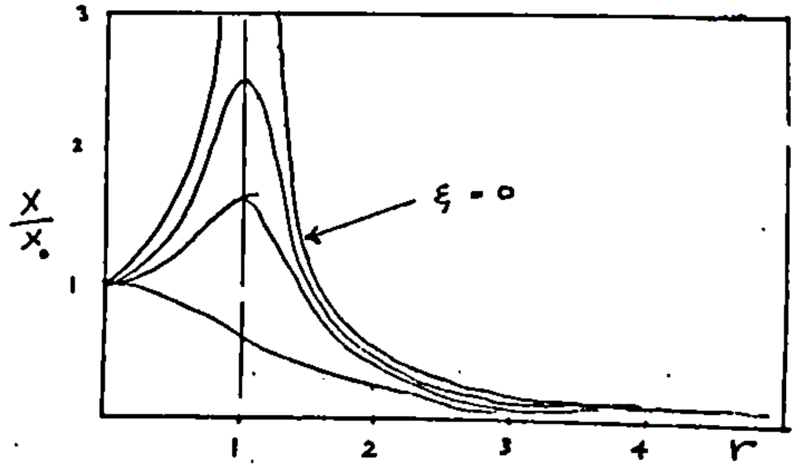
الجدول التالي يوضَّح بعض قيم الإزاحة وزاوية الطور:

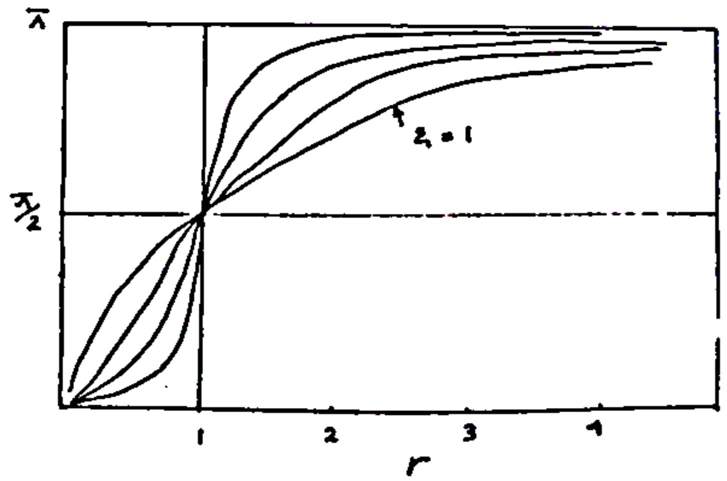
r	X/X_0	ϕ
0	1	0
1	$\frac{1}{2\xi}$	$\frac{\pi}{2}$
∞	0	π

لاحظ أنَّ النسبة $\frac{X}{X_0}$ عندما تكون $r=1$ ، تعتمد على المضاءلة المتوفرة في الجهاز. فإذا كان الجهاز خالٍ من المضاءلة أي $\xi = 0$ فان $\frac{X}{X_0} = \infty$. ولكن بوجود المضاءلة، تُصبح النسبة

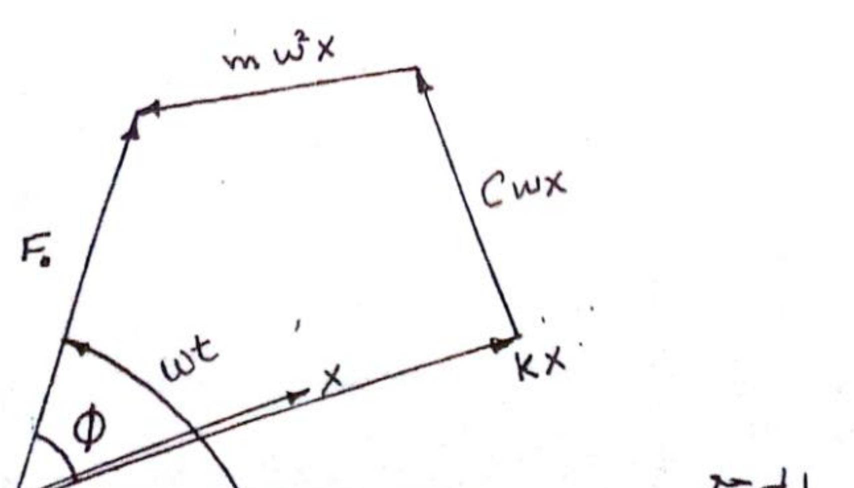
محدودة، وعندما تُصبح المضاءلة حرجة $\xi = 1$ نجد أنَّ النسبة عند الرنين $\frac{X}{X_0} = \frac{1}{2}$. الرسم التالي

يوضِّح العلاقات التي أشرنا إليها.





ويمكن استنتاج نفس المعادلات بطريقة الرسم كما موضَّح أدناه.



حيث نلاحظ أنَّ،

$$F = F_0 \sin \omega t$$

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

والقوى في الياي F_k والمضائل F_c والقصور F_m كما يلي،

$$F_k = kx = kX \sin(\omega t - \phi)$$

$$F_c = c\dot{x} = k\omega X \cos(\omega t - \phi) = k\omega X \sin\left[(\omega t - \phi) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$F_m = m\ddot{x} = -m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) = m\omega^2 X \sin\left[(\omega t - \phi) + \pi\right]$$

ومن الرسم يمكن استخلاص الآتي:

$$\left(kX - m\omega^2 X\right)^2 + \left(c\omega X\right)^2 = F_0^{\ 2}$$

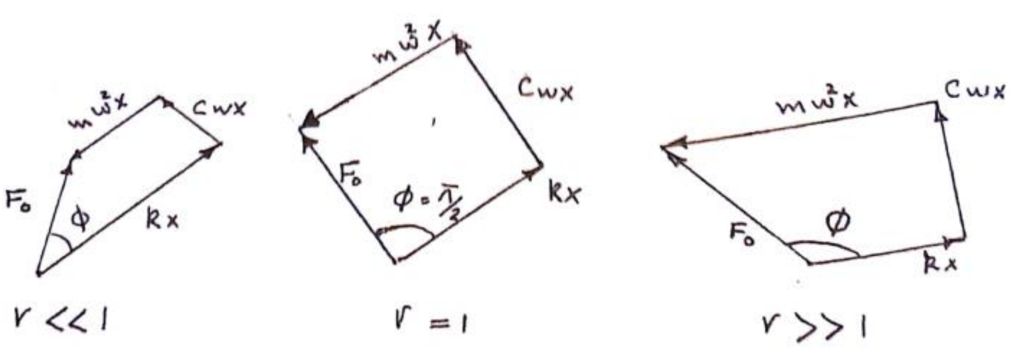
$$\left[(p^2 - \omega^2)X\right]^2 + (2\xi p\omega X)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

والتي يمكن إعادة كتابتها بالصيغة المألوفة،

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{c\omega X}{kX - m\omega^2 X} = \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

يمكن دراسة سلوك الجهاز من مخطَّط القوى للحالات الثلاث وهى $r \ll 1$ و $r = 1$ و $r \gg 1$، والمخطَّطات موضَّحة أدناه.

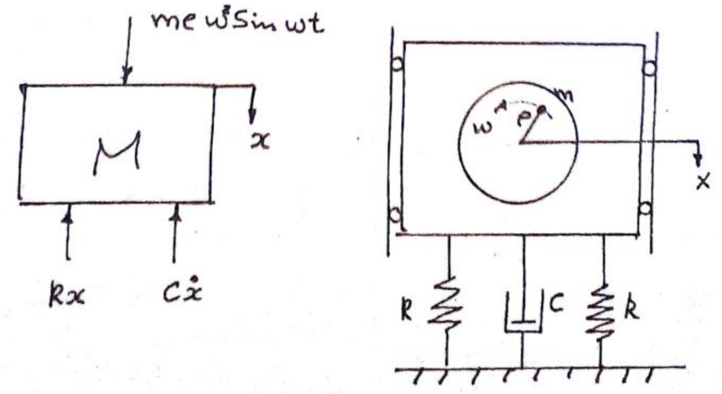


عندما تكون r<<1، تكون قوة القصور والمضاءلة صغيرة وبالتالي تكون زاوية الطور صغيرة، وبالتالي فإنَّ القوة المسلطة تكون مساوية تقريباً لقوة الياي. وعندما تكون r=1 ، فإنَّ زاوية الطور تكون 90 درجة، ويصبح المخطَّط كما في الرسم. قوة القصور الآن أكبر وتوازيها قوة الياي، بينما القوة المسلَّطة تقابل قوة المضاءلة. وعندما تكون r>>1 فان ϕ تقترب من 180 درجة، و تتجه القوة المسلطة كلها تقريباً للتغلب على قوة القصور ويمكن على أية حال استنتاج معادلة الحركة التالية:

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} + X_1 e^{-\xi p t}\sin(p\sqrt{1-\xi^2 t} + \phi_1)$$

5.2 عدم الاتزان في الأجزاء الدوارة:

إنَّ عدم الاتزان في الأجزاء الدوارة مصدر شائع لإثارة الاهتزاز. نأخذ جهاز يهتز في الاتجاه الرأسي بواسطة آلة دوَّارة غير متزنة كما موضَّح في الرسم أدناه.



عدم الاتزان تم تمثيله بكتلة لاتمركزية m تدور بسرعة ω والاتمركز e.

معادلة الحركة:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

ويمكن إيجاد سعة الحركة وزاوية الطور،

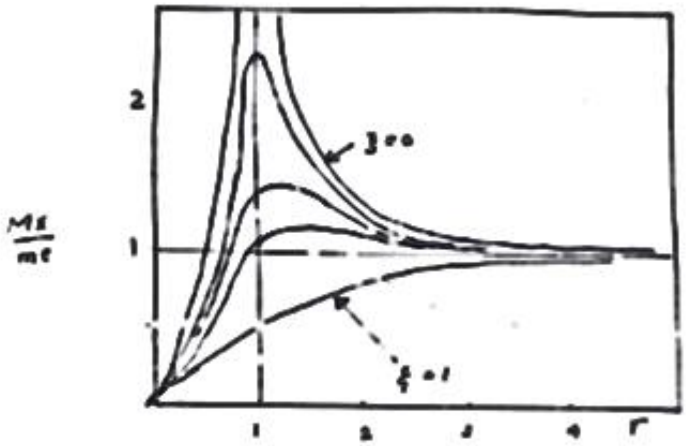
$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

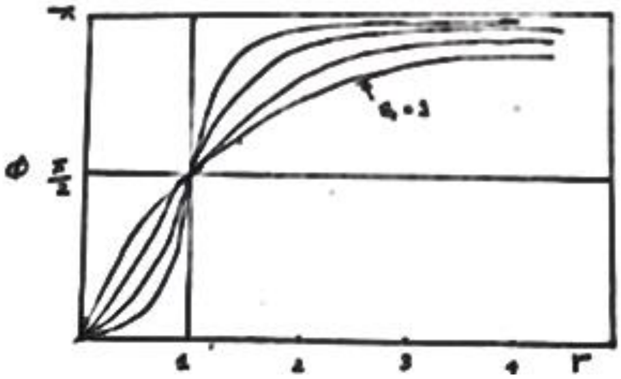
$$\tan\phi = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

والحل الكامل،

$$x(t) = x_1 e^{-\xi p t}\sin(p\sqrt{1-\xi^2}\,t + \phi_1)$$

$$+\frac{\frac{me}{M}r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\sin(\omega t-\phi)$$





مثال(1):

آلة مزدوجة مثيرة للاهتزاز استخدمت في اهتزاز جهاز يتكون من كتلة وياى ومضائل كما موضَّح. ويتغير سرعة دوران الآلة تم تسجيل سعة رنين 6mm ولما زيدت السرعة زيادة كبيرة بعد الرنين لُوحظ أنَّ السعة تقترب من 0.8mm. أوجد نسبة المضاءلة في الجهاز.

$$r=1\ ,\ X_1=6mm$$

$$\frac{M\,X_1}{me}=\frac{1}{2\xi} \qquad (1)$$

$$r>>1\,,X_2=0.8mm$$

$$\frac{M\,X_2}{me}=1 \qquad (2)$$

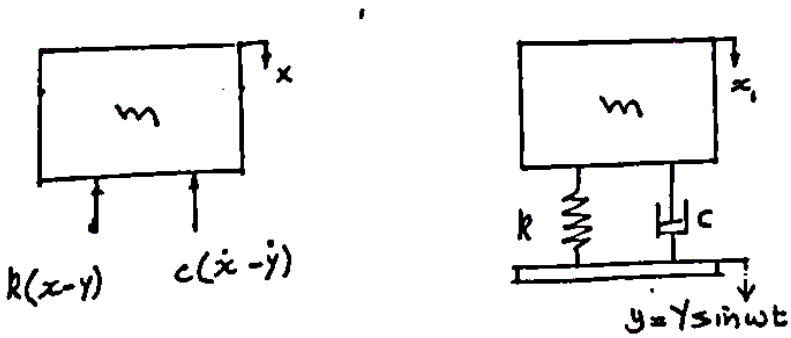
اقسم المعادلة(2) على المعادلة(1)

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{1}{2\xi}$$

$$\therefore \xi=\frac{1}{2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{0.8}{6}\right)=\underline{0.0666}$$

5.3 حركة الأرضية:

في حالات عديدة تتم إثارة الجهاز بحركة أرضية كما موضَّح في الرسم.



معادلة الحركة:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

$$\ddot{x}+2\xi px+\,p_2x=2\xi p\dot{y}+\,p^2y$$

عوِّض،

$$y=Y\sin\omega t$$

$$x=X\sin(\omega t-\phi)$$

لتُصبح معادلة الحركة كما يلى:

$$-\omega^2 X \sin(\omega t-\phi)+2\xi p\omega X\cos(\omega t-\phi)$$

$$+p^2 X\sin(\omega t-\phi)=2\xi p\omega Y\cos\omega t+p^2 Y\sin\omega t$$

$$\omega t-\phi=\pi/2$$

$$(p^2-\omega^2)X=-2\xi p\omega Y\sin\phi+p^2 Y\cos\phi \qquad (1)$$

$$\omega t-\phi=0$$

$$2\xi p\omega X=2\xi p\omega Y\cos\phi+p^2 Y\sin\phi \qquad (2)$$

ربِّع (1) و(2) وأجمعهما لتحصل على،

$$\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$\tan\phi=\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2}$$

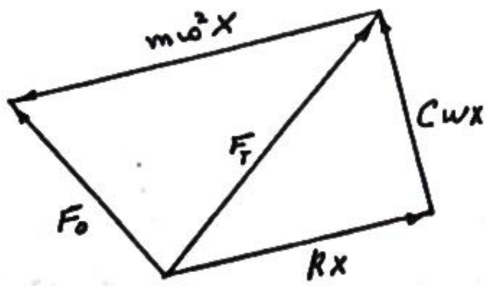
والنسبة بين $\left|\frac{X}{Y}\right|$ تعرف بالمنقولية، أي أنَّ،

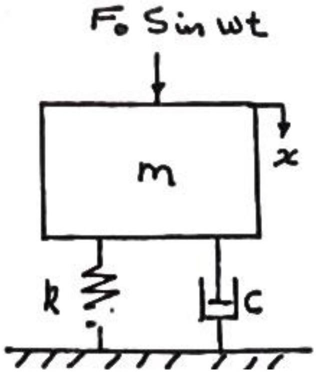
$$\left|\frac{X}{Y}\right|=TR$$

$$TR=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

5.4 عزل الاهتزاز:

إنَّ القوى الناجمة من الاهتزاز في الآلات والماكينات عادة لا يمكن تفاديها، ولكن أثرها على الأجهزة يمكن التقليل منه بمقدار وافر عن طريق يايات مناسبة تعرف بالعوازل. في الرسم أدناه نحاول إيجاد القوة المنقولة للأرضية.





$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2}$$

$$\therefore \frac{F_T}{m} = X\sqrt{p^4 + (2\xi p\omega)}^{\,2}$$

$$F_0 = \sqrt{\left(kX - m\omega^2 X\right)^2 + (c\omega X)^2}$$

$$\therefore \frac{F_0}{m} = X\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 + (2\xi p\omega)}^{\,2}$$

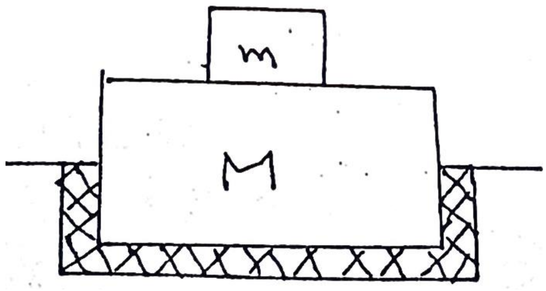
$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{(1+2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

والواضح أنَّ $\frac{F_T}{F_0}$ مماثلة للعلاقة $\frac{X}{Y}$ أي أنَّ المنقولية في هذه المرة،

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

وبالتالي فإنَّ مسالة عزل كتلة عن حركة الأرضية مماثلة لعزل الأرضية عن قوى الاهتزاز . والرسم المرفق يوضِّح أنَّ المنقولية تقل عن واحد فقط عندما تكون $r > \sqrt{2}$ ومن الملاحظ عندما تكون $r > \sqrt{2}$ فإنَّ الجهاز بدون مضائل أفضل في تقليل المنقولية من الجهاز الذي يشتمل على مضائل. بعض المضاءلة مطلوبة بالطبع وذلك لتجاوز منطقة الرنين على الرغم أنَّ سعة الحركة عند الرنين يمكن التحكم فيها باستخدام نواطير.

يمكن تقليل سعة الحركة بتثبيت الآلة على كتلة كبيرة M كما في الرسم أدناه.



وفي حالة تجاهل المضاءلة فإنَّ المنقولية تكون،

$$TR = \frac{1}{r^2 - 1}$$

ومفهوم في هذه الحالة أنَّ $r > \sqrt{2}$.

مثال(2):

آلة كتلتها 100kg مسنودة على عدد من اليايات مجموع ثوابتها 700kN/m ولها عضو دوَّار غير متزن ينتج قوة إثارة 350N عند سرعة 3000 لفة/الدقيقة. على افتراض نسبة المضاءلة $\xi = 0.2$،

أوجد :- (أ) سعة الحركة (ب) المنقولية (ج) القوة المنقولة .

الحل:

k =700kN/m ، m=100kg

$$F_0 = 350N \ , \omega = \frac{2\pi \times 3000}{60} = 314 rad/s$$

(أ) سعة الحركة،

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{700.10^3}{100}} = 83.7 rad/s$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{350}{700.10^3} m = 0.5 mm$$

$$r=\frac{\omega}{p}=\frac{314}{83.7}=3.75$$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)+(2\xi r)^2}}$$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{(1-3.75^2)^2+(2\times0.2\times3.75)^2}}$$

$$\mu=\underline{\underline{0.0761}}$$

$$\frac{X}{X_0}=\mu$$

$$\therefore X=0.0761\times0.5m=\underline{0.038}mm$$

(ب) المنقولية،

$$TR=\frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$TR=\frac{\sqrt{1+(2\times0.2\times3.75)^2}}{\sqrt{(1-3.75^2)^2+(2\times0.2\times3.75)^2}}=\underline{0.137}$$

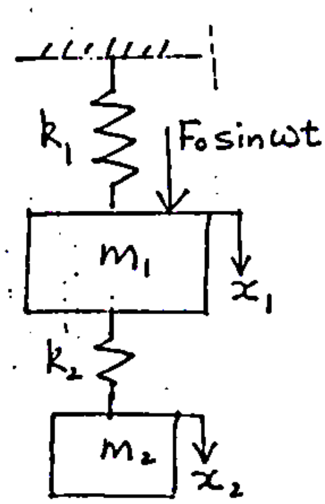
(ج) القوة المنقولة،

$$\frac{F_T}{T_0}=TR$$

$$\therefore F_T=0.137\times350N=\underline{48}N$$

5.5 ماصة الاهتزاز:

عندما يتم ضبط منظومة تتكون من كتلة m_2 وياي k_2 كما في الرسم أدناه على ذبذبة قوة الإثارة بحيث تكون $\omega^2=\frac{k_2}{m_2}$ ، فإنَّ المنظومة تعمل ماصة للاهتزاز، وتقوم بتقليص سعة حركة الكتلة الرئيسية m_1 الى الصفر.



معادلة الحركة للكتلة m_1،

$$-k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_\circ \sin\omega t = m_1\ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 + \left(p_{11}^2 + p^2\right)x_1 - p^2x_2 = \frac{F_o}{m_1}\sin\omega t \qquad (1)$$

حيث أنَّ،

$$p_{11}{}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \qquad p_{21}{}^2 = \frac{k_2}{m_1}$$

معادلة الحركة للكتلة m_2،

$$-k_2(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_2 + P_{22}^2x_2 - P_{22}^2x_1 = 0 \qquad (2)$$

حيث أنَّ،

$$P_{22}^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

نفترض الحل $\quad x_1 = X_1\sin\omega t \ , \quad x_2 = X_2\sin(\omega t - \phi)$

المعادلتان (1) و (2) تصبحان،

$$\left[\left(P_{11}{}^2 + P^2\right) - \omega^2\right]X_1\sin\omega t - P^2X_2\sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m_1}\sin\omega t \quad (3)$$

$$\left(P_{22}{}^{2}-\omega^{2}\right)X_{2}\sin(\omega t-\phi)-P_{22}{}^{2}X_{1}\sin\omega t=0 \qquad (4)$$

في المعادلة (4) عوِّض،

$$\omega t-\phi=0 \quad , \quad \omega t-\phi=\frac{\pi}{2}$$

لنحصل على،

$$X_{2}=\frac{P_{22}^{2}}{P_{22}^{2}-\omega^{2}}X_{1} \quad , \quad \phi=\pi$$

عوِّض في المعادلة (3)،

$$\left[\left(P_{11}{}^{2}+P^{2}\right)-\omega^{2}\right]X_{1}-\frac{P^{2}P_{22}{}^{2}}{P_{22}{}^{2}-\omega^{2}}X_{1}=\frac{F_{0}}{m}$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلي،

$$\frac{X_{1}k_{1}}{F_{o}}=\frac{1-\left(\frac{\omega}{P_{22}}\right)^{2}}{\left[1+\frac{k_{2}}{k_{1}}-\left(\frac{\omega}{P_{11}}\right)^{2}\right]\left[1-\left(\frac{\omega}{P_{22}}\right)^{2}\right]-\frac{k_{2}}{k_{1}}}$$

لاحظ أنَّه عندما تكون النسبة $\frac{\omega}{P_{22}}=1$ فإنَّ سعة الحركة $X_1=0$.

والآن إذا كان $P_{11}=P_{22}$ فإنَّ $\frac{m_{2}}{m_{1}}=\frac{k_{2}}{k_{1}}=\mu$

وبالتالي تُصبح المعادلة،

$$\frac{X_{1}k_{1}}{F_{o}}=\frac{1-r^{2}}{1-(2+\mu)r^{2}+r^{4}}$$

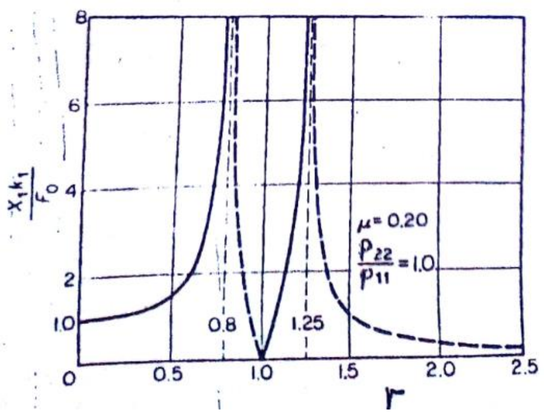
حيث أنَّ،

$$r=\frac{\omega}{P_{22}}=\frac{\omega}{P_{11}}$$

وإذا كان $\mu = 0.2$ تُصبح المعادلة،

$$\frac{X_1 k_1}{F_o} = \frac{1-r^2}{1-2.2r^2+r^4}$$

هذه المعادلة موضَّحة في الرسم التالي،



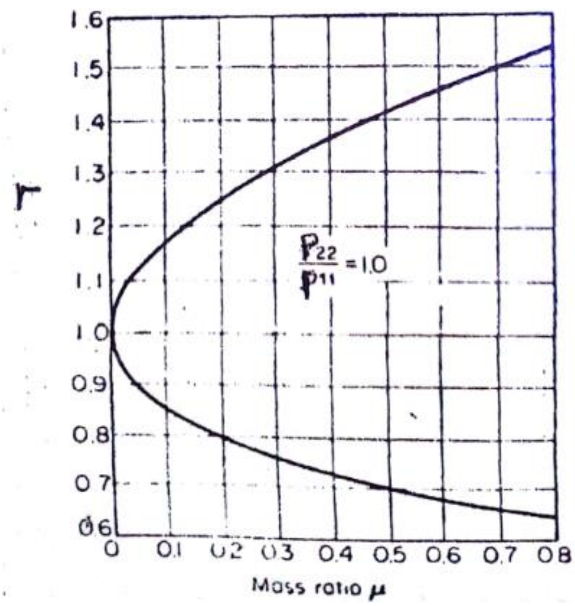
ولأنَّ للجهاز درجتان من الحرية فلهذا لـه ذبذبتان طبيعيتان تعتمدان على قيمة μ وللحالة التي تكون فيها $P_{11}=P_{22}$، فإنَّ،

$$\frac{X_1 k_1}{F_o} = \frac{1-r^2}{1-(2+\mu)r^2+r^4}$$

ولإيجاد الذبذبتين الطبيعيتين أو حالة الرنين نضع،

$$1-(2+\mu)r^2+r^4=0$$

حيث يمكن تعويض قيم محددة لـ μ ومن ثم إيجاد قيم r ومن ثم إنتاج الرسم البياني التالي



والآن ماذا يمكن أن يُقال عن كتلة الماصة. عندما يكون $\omega = P_{22}$ فإنَّ سعة الحركة $X_1 = 0$ ،

ولكن تتعرض كتلة الماصة من المعادلة (1) إلى سعة مقدارها $X_2 = \frac{-F_0}{k}$

وهذا يعنى أنَّ منظومة الماصة m_2, k_2 تبذل قوة مساوية لقوة الإثارة ولكن مضادة لها من ناحية

الاتجاه. ولهذا فإنَّ قيمة m_2 , k_2 يعتمدان على قيمة X_2 المسموح بها.

مثال(3):

في الجهاز الموضَّح في الرسم أدناه $m_1 = 90\text{kg}$, $m_2 = 22.5\text{kg}$. إذا أثيرت الكتلة m_1 بعدم إتزان مقداره 0.023kgm يدور بسرعة 1800 لفة/الدقيقة، أوجد القيمة المناسبة لثبات الياي k_2. كم تكون سعة حركة الكتلة m_2.

الحل :

$$m_1 = 90kg \quad , \quad m_2 = 22.5kg \quad , \quad me = 0.023kgm$$

$$\omega = \frac{2\pi \times 1800}{60} = 188.5 rad/s$$

$$F_0 = me\omega^2 = 0.023 \times 188.5^2 = 817N$$

$$\frac{\omega}{P_{22}} = 1$$

$$\therefore P_{22} = \underline{188.5} rad/s$$

$$P_{22}{}^2 = \frac{k_2}{m_2} = 188.5^2$$

$$\therefore k_2 = 22.5 \times 188.5^2\ N/m = \underline{799.5} kN/m$$

$$X_2 = \frac{F_0}{k_2} = \frac{817}{799.5.10^3}\ m = \underline{1.02} mm$$

5.6 تمرين:

1. جهاز كتلته 1.95kg يهتز في وسط لزج. أوجد معامل المضاءلة عندما تؤدى قوة توافقية 24.46N إلى سعة رنين 12.7mm بزمن دوري 0.2s.

Ans. (c=61.3Ns/m)

2. إذا تمت إثارة الجهاز في المسألة (1) بقوة توافقية ذبذبتها 4Hz، كم تكون النسبة المئوية في الزيادة في سعة حركة الاهتزاز عند فصل المضائل.

Ans. (178%)

3. كتلة تتصل بمضائل وياي له ثابت 525N/m. عندما أزيحت الكتلة ثم أطلقت وُجِد أنَّ الزمن الدوري للاهتزاز 1.8s ونسبة أي سعتين متتاليتين 4.2 و1.0 ، أوجد سعة الحركة وزاوية الطور عند تسليط قوة على الجهاز F=2cos3t.

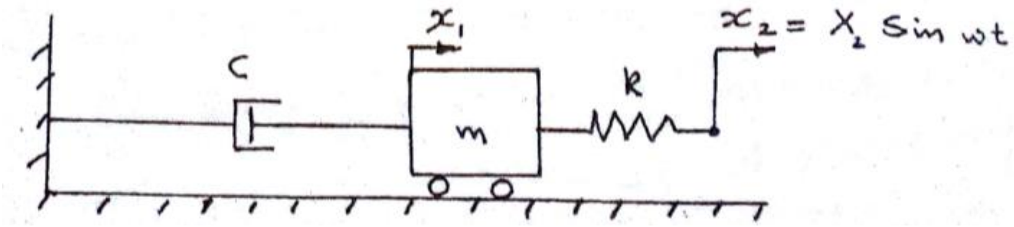
Ans. (X=7.97mm , ϕ=51.5^o)

4. برهِّن أنَّ أقصى قيمة لسعة الحركة لجهاز يتكون من كتلة وياي ومضائل يحدث عندما تكون النسبة $\frac{\omega}{p} = \sqrt{1-2\xi^2}$.

5. جهاز يتكون من كتلة وياي ومضائل تمت أثارته بقوة $F_0 \sin \omega t$ عند الرنينين قيست سعة الحركة فكانت 5.8mm. عند ذبذبة تساوى 0.8 من ذبذبة الرنين، قِيست سعة الحركة فوجدت 4.6mm. أوجدت نسبة المضاءلة للجهاز.

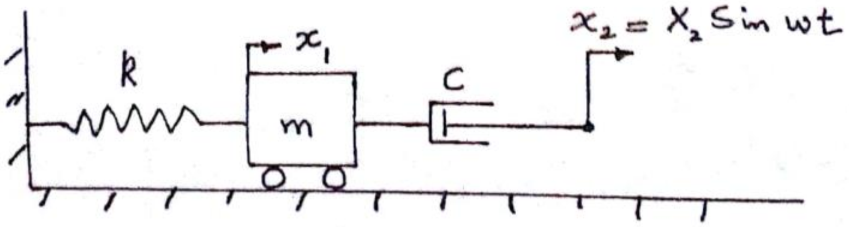
Ans. $(\xi = 0.185)$

6. استنتج معادلة الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه، ثم أوجد حل الحالة المستقرة وزاوية الطور.



Ans. $\left[\dfrac{X_1}{X} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}, \tan\phi = \dfrac{2\xi r}{1-r^2}\right]$

7. استنتج معادلة الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه ثم أوجد سعة الحركة X وزاوية الطور ϕ.

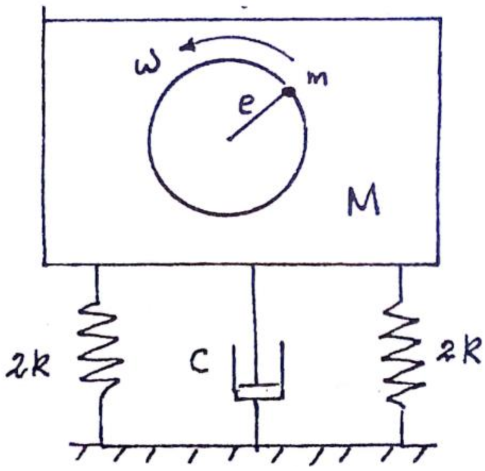


Ans. $\left[\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{2\xi r}{\sqrt{(1-r^2) + (2\xi r)^2}}, \tan\phi = \dfrac{2\xi r}{1-r^2}\right]$

8. جهاز إثارة مزدوج كما في الرسم يستخدم لتحديد خصائص الاهتزاز لإنشاء كتلته 181.4kg .عند سرعة 900 لفة/الدقيقة، وبينما الإنشاء يتحرك إلى أعلى عبر موضع الاتزان، كانت الكتلتان الا تمركزيتان في القمة. وعندها كانت سعة الحركة 21.6mm .إذا كان عدم الاتزان في الجهاز 0.0921kgm. أوجد:

(أ) الذبذبة الطبيعية للإنشاء (ب) نسبة المضاءلة

(ج) السعة عند سرعة 200 لفة /الدقيقة (د) الوضـع الـزاوي للكتلتـين الا تمركـزيتين فـي اللحظة التي يتحرك فيها الإنشاء الى أعلى عبر موضع الاتزان.



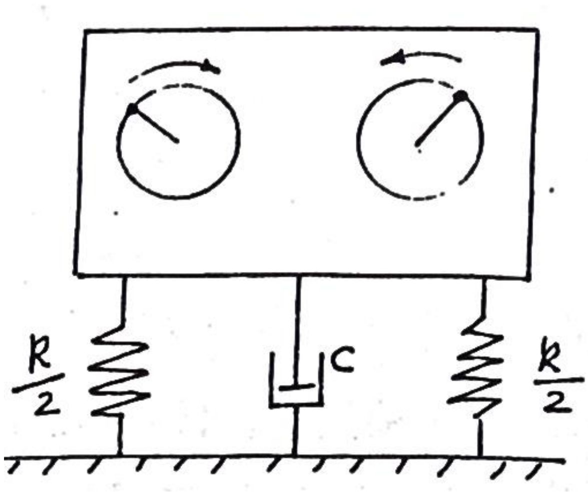
Ans. $\left(f = 15Hz, X = 1.49mm, \xi = 0.0118, \phi = 177.3^{\circ}\right)$

9. جسم يهتز على خط مستقيم. جهاز المضـاءلة ضبط بحيث تكون المضـاءلة حرجـة. في اختبار تدريج. أزيح الجسم 51mm من موضع الاتزان بواسطة قوة 35.6N. أثناء الخدمة يتعرض الجسم لقوة اهتزاز توافقية بسعة 71.2N وبذبذبة ضعف ذبذبة الاهتزاز الحر بدون مضاءلة . أوجد سعة الاهتزاز القسري.

Ans. (X=20.4mm)

10. ماكينة مركبة على أربعة يايات لكل منهم ثابت k. مركز كتلة الحدَّاف يقع على مسافة e من محور العمود (انظر الرسم). كتلـة الحدَّاف m كتلـة الماكينـة بمـا فـي ذلـك الحدَّافM. مضـائل لـزج لـه ثابـت C يتصـل بالماكينـة. يـدور الحدَّاف بسرعة زاويـة ω . افترض امتنـاع الحركة الأفقية للماكينة، برهن أنَّ المعادلة التفاضلية لاهتزاز رأسي صغير هي :

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = me\omega^2 \sin \omega t$$



11.إذا كان الحدَّاف في المسالة (10) يدور بسرعة 300 لفة /الدقيقة بينما المضائل مفصول، أوجد سرعة الحركة. خذ M=204kg   m = 22.7kg , e =2.54mm , k = 49kN/m.

Ans. (X=11.2mm).

12.افترض في المسالة (11) تم توصيل المضائل إلى حاوية الماكينة. ثابت المضائل يساوى نصف معامل المضاءلة الحرجة. أحسب سعة الاهتزاز القسري. أحسب زاوية الطور.

Ans. (X=0.283mm ، ϕ =88.5°)

13.جسم كتلته 4.4kg مسلَّط عليه قوة اهتزاز بسعة 89N. ياى له ثابت 3.5kN/m ومضائل له معامل يساوى القيمة الحرجة يتصلان بالجسم بحيث تكون قوة الياى والمضاءلة في نفس اتجاه قوة الاهتزاز. لمنع التلف للأجزاء المجاورة، يجب أن تكون سعة الحركة أقل 5.1mm. أوجد مدى الذبذبة الدائرية (إن وُجدت) التي يجب أن تكون في حدودها قوة الاهتزاز.

Ans. $(\omega > 56.4 rad/s)$

14.أرسم زاوية الطور ϕ للاهتزاز القسري لجهاز له مضاءلة ودرجة حرية واحدة بدلالة نسبة الذبذبة $\frac{\omega}{p}$. استخدم القيم الآتية $\xi = 0 , 0.02 , 0.2 , 0.5 , 1 , 2$. لاحظ أنَّه عندما تكون $\frac{\omega}{p} = 1 , \phi = \frac{\pi}{2}$ بغض النظر عن ξ .

15. محرك كتلته 159kg محمول على أربعة يايات كل واحد منهم له ثابت 131kN/m. عدم الاتزان في المحرك يكافئ كتلة 28g موضوعة على بعد 152mm من محور الدوران إذا علمنا أنَّ المحرك محكوم ليتحرك في الاتجاه الرأسي فقط ، أوجد (أ) سرعة الرنين (ب) سعة الحركة عندما تكون سرعة المحرك1200 لفة /الدقيقة .

Ans. $(\omega = 548 rev \min \ , \ X = 0.034 mm)$

16. كتلة m معلقة من ياى له ثابت k ومسلَّط عليها قوة توافقية راسية قيمتها $F_0 \sin \omega t$، أوجد قيمة ω التي تؤدى إلى مضاعفة سعة الحركة بالمقارنة بالانحراف السكوني الذي تسببه قوة ثابتة مقدارها F_0 .

Ans. $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}\right)$

17. محرِّك كتلته 227kg محمول على عارضة أفقية خفيفة. الاتزان في قلب المحرِّك يكافئ 28g على مسافة 254mm من محور الدوران. إذا علمنا أنَّ الانحراف الاستاتيكى للعارضة تحت تأثير كتلة المحرك 5.59mm، أوجد (أ) سرعة الرنين (ب) سعة الحركة عند سرعة 800 لفة/الدقيقة.

Ans. (N=400rev/min ,X=0.0424mm)

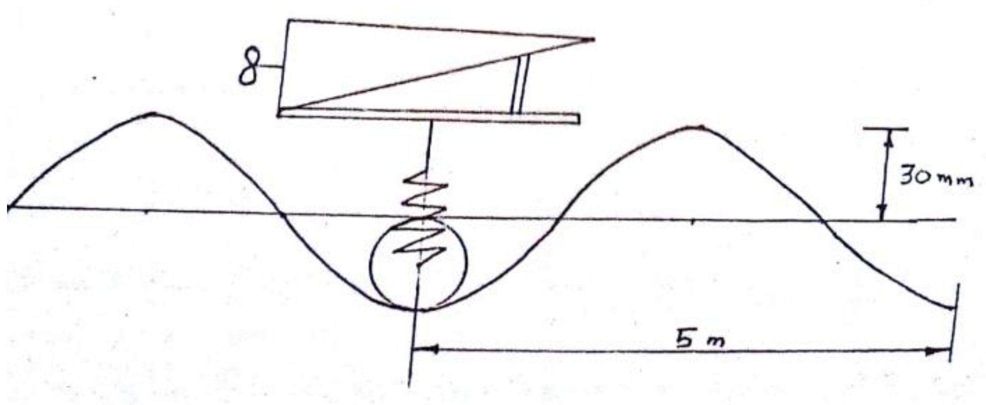
18. محرِّك كتلته 45kg محمول على أربعة يايات كل واحد منهم له ثابت 100kN/m. المحرِّك محكوم ليتحرك رأسياً وسعة حركته 0.5mm عند سرعة 1200 لفة /الدقيقة. إذا كانت كتلة قلب المحرك 14kg أوجد المسافة بين مركز كتلة قلب المحرَّك ومحور العمود.

Ans. (e=0.703mm)

19. إذا زيدت سرعة محرِّك محمول على ياى تدريجياً من 300 إلى 400 لفة /الدقيقة، يُلاحظ أنَّ سعة الاهتزاز الناجم من عدم اتزان القلب ينخفض باستمرار من 1.905mm إلى 1.016mm. أوجد سرعة الرنين.

Ans. (N=245rev/min)

20. مقطروة صغيرة كتلتها 200kg محمولة على يايين لكل ثابت 20kN/m. تسحب المقطورة على طريق يمكن تمثيل سطحه بمنحنى جيبي بسعة 30mm ومسافة دورية 5m أوجد (أ) سرعة الرنين (ب) سعة اهتزاز المقطورة عند سرعة 60km/h. أنظر الرسم.



Ans. (v=40.4km/h , X=25.3mm).

21. إذا علمنا أنَّ سعة اهتزاز المقطورة في المسالة (20) يجب ألاَّ يتجاوز 15mm، أوجد أقل سرعة يمكن أنَّ تسحب بها المقطورة على الطريق.

Ans. (v=70.1km/h)

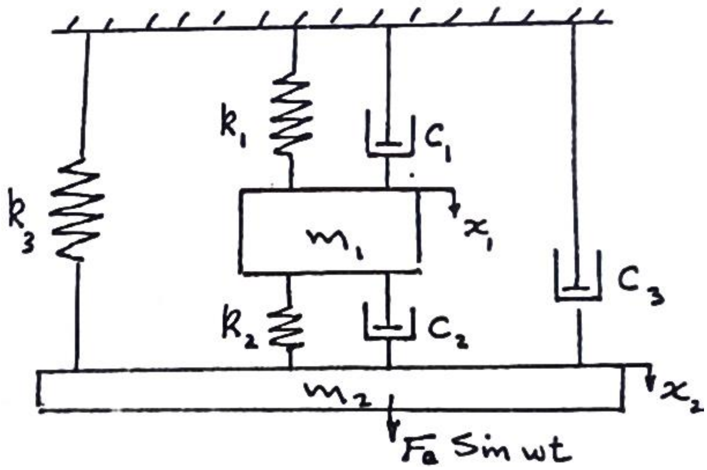
22. محرِّك كتلته 25kg محمول على أربعة يايات ثابت كل منهم 200kN/m. الاتزان في قلب المحرك يماثل كتلة 30g موضوعة على مسافة 125mm من محور الدوران. إذا علمنا أنَّ المحرك محكوم ليتحرك راسياً، أوجد سعة الاهتزاز في حالة الاستقرار عند سرعة 800 لفة/الدقيقة على افتراض (أ) لا توجد مضاءلة (ب) نسبة المضاءلة $c/c_C=0.125$.

Ans. (X=1.5mm , X=0.583mm)

23. آلة كتلتها 363kg محمولة على يايين كل له ثابت 35kN/m. قوة دورية ذات قيمة قصوى89N تم تسليطها على الآلة بذبذبة 2.5Hz. إذا علمنا أنَّ معامل المضاءلة 1.4kNs/m، أوجد سعة الاهتزاز في حالة الاستقرار.

Ans. (X=3.303mm)

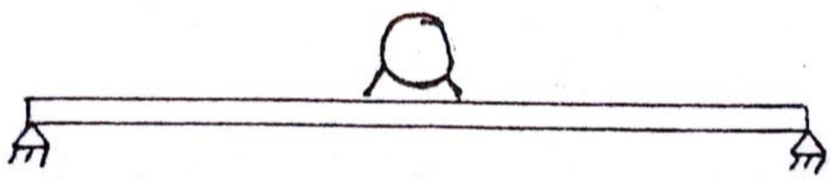
24. اكتب معادلتي الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



$$Ans.(m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c\ (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = F_0 \sin \omega t)$$

25. لتحديد عدم الاتزان لقلب محرِّك، ركب المحرك في منتصف عارضة مسنودة إسناد بسيط كما في الرسم أدناه. الكتلة الكلية للمحرِّك M والإزاحة الاستاتيكية الناجمة δ. إذا كان عدم الاتزان ناجم عن الكتلة m. والاتمركز e. استنتج معادلة لحساب الاتمركز e إذا كان سرعة المحركN لفة/ الدقيقة وسعة الحركة الراسية القسرية X(mm).



Ans. $\left(e = \frac{M}{m}\left(\frac{1.047.10^{-6}}{N^2} - 1\right)X\right)$

26. آلة كتلتها 43.8kg مسنودة على عدد من اليايات مجموع ثوابتها 17.5kN/m. معامل المضاءلة في المسند 1094Ns/m إذا علمت أنَّ قوة الاضطراب القصوى المسلطة على الآلة مقدارها 22.2N ، أوجد ذبذبة الرنين وسعة حركة الرنين.

Ans. (f=3.18Hz , X=1.015mm)

27. جهاز يتكون من كتلة 5.4kg معلقة بواسطة ياي له ثابت k=1051N/m ومضائل لزج له معامل c=75Ns/m. إذا سُلطت على الجهاز قوة توافقية سعتها 8.9N أوجد (أ) ذبذبة الرنين (ب) سعة الحركة عند الرنين (ج) زاوية الطور عند الرنين. إذا كانت الذبذبة 2.5Hz، أوجد : (د) سعة الحركة (هـ) زاوية الطور.

Ans. $(f = 2.22Hz, X = 8.5mm, \phi = \frac{\pi}{2}, X = 7.4mm, \phi = 77^\circ)$

28. آلة كتلتها 2267kg محمولة على ركوبة تحتوى على ياي ومضائل لزج. الانحراف الاستاتيكى للركوبة 0.279mm، ومعامل المضاءلة 59.3kNS/m. ماهي القوة العظمى المنقولة بواسطة الركوبة إذا سلطت قوة إثارة جيبية لها سعة 2669N وذبذبة 30Hz.

Ans. (F_T=19.5kN)

29. وحدة ضغط تتكون من أسطوانة واحدة يتم تشغيلها بواسطة محرك كهربائي. كتلة الوحدة الكلية 68kg وهى محمولة على ياي ولا تهتز إلاَّ راسياً. الأجزاء المترددة في الوحدة كتلتها 0.91kg ونصف قطر الكرنك 38mm. ثابت الياي 87.6kN/m. أوجد السرعة الحرجة للوحدة ومدى السرعة التي تتجاوز فيها الحركة الراسية 5.1mm بسبب عدم الاتزان.

Ans. (N=342rev/min , 327 – 361rev/min)

30. قوة $F_0 \cos \omega t$ سلطت على كتلة تجلس على قاعدة تتصل بياي ومضائل لزج. استنتج بدلالة F_0 والكتلة m وثابت الياي k، ومعامل المضاءلة C صبغ لقيم ω للاهتزاز القسري والتي تجعل كل من الآتي قوة قصوى في حالة الاستقرار (أ) الإزاحة (ب) السرعة (ج) العجلة. أوجد قيم لسعة الاهتزاز عندما تكون w لها القيم المعطاة في (أ) و(ب)

$$Ans.\left(\begin{array}{c} \omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{c^2}{2m^2}, X_{\max} = \frac{F_0}{c}\left(\frac{k}{m} + \frac{c^2}{2m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \omega^2 = \frac{k}{m}, X_{\max} = \frac{F_0}{c}\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \omega^2 = \frac{2k^2}{2km - c^2} \end{array}\right)$$

31. ماكينة رأسية لها أسطوانة واحدة كتلتها الكلية 1088kg محمولة على محامل مرنة لها ثابت 4.9MN/m. الأجزاء المترددة كتلتها 2.2kg والشوط 356mm. إذا كانت المضاءلة 0.14 من القيمة الحرجة، أحسب سعة الاهتزاز عندما تدور الماكينة بسرعة 400 لفة/ الدقيقة.

Ans. (X=0.22mm)

32. استنتج معادلة الاهتزاز لجهاز له درجة واحدة من الحرية يتكون من كتلة وياي ومضائل لزج كتلة 5.4kg معلقة من ياي له ثابت 3.5kN/m. عند إزاحة الكتلة رأسياً من موضع الاتزان وإطلاقها وُجد أنَّ السعة إنخفضت نتيجة المضاءلة إلى عُشر قيمتها الأولية عبر خمسة دورات كاملة. إذا افترضنا أنَّ المضاءلة لزجة، أحسب معامل المضاءلة. إذا سُلطت قوة دورية (F=89cos(25t) على الكتلة، أوجد سعة الاهتزاز القسري في حالة الاستقرار.

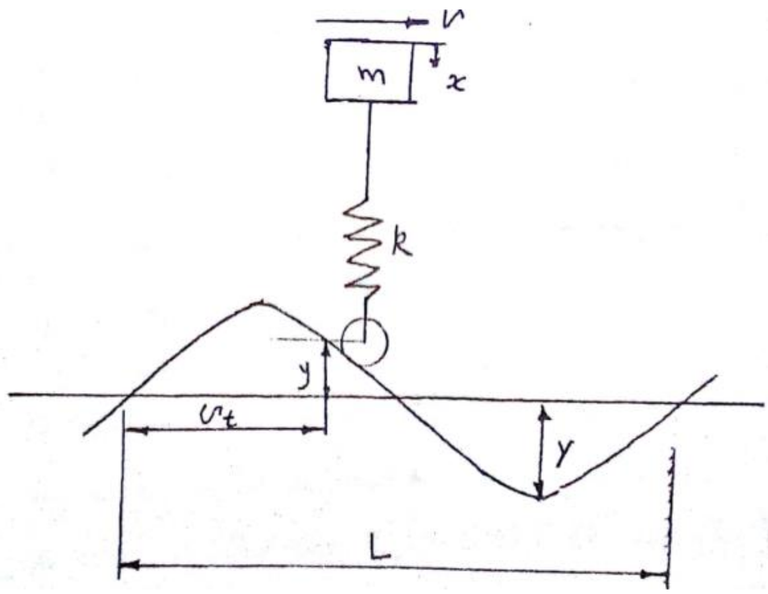
Ans. (c=20.1Ns/m , X=172.7mm)

33. الأجزاء المترددة في ماكينة رأسية لها أسطوانة واحدة تنتج قوة اضطراب $89.10^{-5}N^2$ حيث N هي سرعة الدوران (لفة /الدقيقة). الماكينة مركبة على مساند مرنة تحد من القوة المنقولة للأرضية لتكون 334N عند السرعة العادية وهى 2000 لفة /الدقيقة. إذا كانت كتلة الماكينة 91kg، أوجد ثابت الياي في جهاز التعليق مع تجاهل المضاءلة. أوجد أيضاً سرعة الرنين .

بعد ذلك تم إدخال المضاءلة في جهاز التعليق للحد من سعة الاهتزاز عند الرنين إلى 3.81mm، أوجد (أ) نسبة المضاءلة (ب) القوة الأولية المنقولة عند سرعة الرنين (ج) القوة الأولية المنقولة عند السرعة العادية.

Ans. (585rev/min, 342kN/m, 0.12, 1.31kN, 431N)

34. الرسم أدناه يوضِّح شكل مبسَّط لسيارة مسنودة على ياي تسير على طريق غير معبَّد. أوجد معادلة لسعة الحركة بدلالة سرعة السيارة v ومن ثم أوجد أسوأ سرعة يمكن ان تسير بها السيارة.



Ans. $\left(\left|\dfrac{X}{Y}\right| = \dfrac{kL^2}{kL^2 - 4\pi^2 v^2 m},\ v = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$

35. ياي مقطورة مضغوط 101.6mn تحت تأثير حمل المقطورة. أوجد السرعة الحرجة عندما تكون المقطورة سائرة على الطريق الذي وصف في المسالة (34). خذ L=14.63m، Y=76.2mm. كم تكون سعة الاهتزاز إذا كانت المقطورة تسير بسرعة 64.4km/h (تجاهل المضاءلة).

Ans. (V=82.4km/h, X=196.4mm)

36. جهاز راديو في طائرة كتلته 10.9kg يُراد عزله عن اهتزاز الماكينة في المدى 27Hz ولغاية 37Hz. ما هو الانحراف الاستاتيكى للياي الذي يحقق عزل قدرة 85%.

Ans. (X_0=2.613mm)

37. ماكينة ثلاجة كتلتها 30kg يراد إسنادها على ثلاثة يايات ثابت كل منها k(N/m). إذا كانت الماكينة تدور بسرعة 580 لفة/الدقيقة، فكم يكون ثابت الياي k الذي يؤدى إلى نقل 10% فقط من قوة الاهتزاز إلى الأرضية.

Ans. (k=3351N/m)

38. آلـة مسـتخدمة فـي الصـناعة كتلتهـا 453.4kg مسـنودة علـى يايـات انحرافهـا الاسـتاتيكى 5.08mm. إذا كان للآلة عدم اتزان في حالة الدوران مقداره 0.2303kgm أوجد (أ) القوة المنقولـة للأرضـية عنـد سـرعة 1200 لفة/الدقيقـة (ب) سـعة الحركـة عنـد هـذه السـرعة. تجاهـل المضاءلة.

Ans. (F_T=506N , X=0.578mm)

39. محرِّك كهربـائي كتلتـه 68kg مربـوط إلـى كتلـة عازلـة 1200kg والذبذبـة الطبيعيـة للمجموعـة 2.67Hz ونسبة المضاءلة 0.1 (انظر الرسم) إذا كان هنالك عدم اتزان في المحرك أدى إلى نشوء قوة توافقية (F=100sin(31.4t، أوجد سعة الاهتزاز والقوة المنقولة للأرضية.

Ans. (X=0.1105mm , F_T = 42N)

40. جهاز حسَّاس كتلته 113kg يُراد تركيبه في موقع يتعرض لعجلة 152.4mm/s2 عندما تكون الذبذبة 20Hz لقد اقترح تركيب الجهاز على فرشة من المطَّاط لها الخواص التالية $\xi = 0.1 , k = 280.2kN/m$ ما مقدار العجلة التي تنتقل إلى الجهاز.

Ans. $\left(\ddot{x} = 31.7 mm/s^2\right)$

41. إذا كـان الجهـاز فـي المسـألة (40) يمكنـه تحمـل عجلـة $20.3mm/s^2$ فقط، اقتـرح حـلاً علـى افتـراض أنَّ الفرشـة المطَّاطيـة هـي المتـوفرة ولا شـيء غيرهـا. أعـط قـيم عدديـة لـدعم الحـل الـذي تقترحه. (زيادة سمك الفرشة بنسبة 35% على الأقل) .

42. في مصنع للتبريد كان قسم من الماسورة الناقلة لسائل التبريد يهتز بشدة عندما كانت ماكينة الثلاجة تعمل بسرعة 232 لفة / الدقيقة. لعلاج هذه المشكلة. تم توصيل منظومة تتكون من كتلة ويـاي للماسـورة لكـي تعمـل كماصـة للاهتـزاز. وكتجربـة اسـتخدمت كتلـة 0.89kg مضـبوطة علـى السرعة 232 لفة / الدقيقة فأعطتِ الذبذبتين الطبيعيتين 3.3Hz و 4.53Hz. إذا وجب تصـميم

منظومة الماصَّة بحيث تقع الذبذبتان الطبيعيتان خارج المدى 2.67Hz و 5.33Hz، فكم تكون كتلة الماصة وثبات الياي.

الفصل السادس

معادلة لاقرينج

(Lagrange Formula)

6.1 مدخل:

قدَّم لاقرينج (1736 – 1813) طريقة لتحليل الأجهزة الديناميكية المحافظة باستخدام طاقة الحركة T و طاقة الوضع U و الشغل W. و هي أسهل في التطبيق من قوانين نيوتن إذا كان الجهاز معقداً كما سنرى في الأمثلة اللاحقة. والسبب في سهولة استخدام طريقة لاقرينج يتمثل في استخدامها كميات لا متجهة.

6.2 استنتاج معادلة لاقرينج:

يمكن كتابة طاقة الحركة كدالة في q_i و $\dot{q}_i$ هكذا

$$T = T(q_1, q_2, .., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$$

حيث أنَّ q_i الإزاحة و $\dot{q}_i$ هي السرعة،

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + ... + \frac{\partial T}{\partial q_n} dq_n \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} d\dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} d\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} d\dot{q}_n \end{aligned}$$

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (1)$$

ولكننا نعلم إذا كان الجهاز يتكون من كتل m_1 ، m_2 ، .... ، m_n تتحرك بسرعات $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ على التوالي فإن طاقة الحركة تكون،

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + ... + \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i^2 \qquad (2)$$

و إذا فاضلنا بالنسبة لـ $\dot{q}_i$ ثم ضربنا في $\dot{q}_i$ نحصل على،

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = m_i \dot{q}_i^2$$

وبالاستعانة بالمعادلة (2)،

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i^2 = 2T$$

إذن،

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

و إذا فاضلنا نحصل على،

$$2dT = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (3)$$

و بطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نجد أنَّ،

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \left[d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \right]$$

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dq_i \qquad (4)$$

كما يمكن كتابة طاقة الوضع هكذا،

$$U = U(q_1, q_2, .., q_n)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 + ... \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n$$

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \qquad (5)$$

و أما الشغل فهو حاصل ضرب القوة Q_i في الإزاحة المتصلة بها q_i. أي أن الشغل W

$$W = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + ... + Q_n q_n$$

$$dW = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + ... + Q_n dq_n$$

$$dW = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i \qquad (6)$$

و الآن،

$$T + U = W$$

$$dT + dU = dW$$

و من المعادلات (4) و (5) و (6) نحصل على،

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] dq_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i$$

و منها نحصل على معادلة الحركة لأي عنصر من عناصر الجهاز،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

و هذه يمكن كتابتها على الشكل التالي،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = Q_i \qquad (7)$$

و الآن نستخدم دالة لاقرينج $L(q, \dot{q})$ و تعني التالي،

$$L = T - U \qquad (8)$$

و إذا فاضلنا بالنسبة لـ $\dot{q}$ ، نحصل على،

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$

و الحد الثاني على اليمين يساوي صفراً لأن U ليست دالة في $\dot{q}_i$ و عليه يكون،

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (9)$$

و هكذا نصل إلي الشكل المألوف لمعادلة لاقرينج بعد تعويض المعادلتين (8) و (9) في المعادلة (7)،

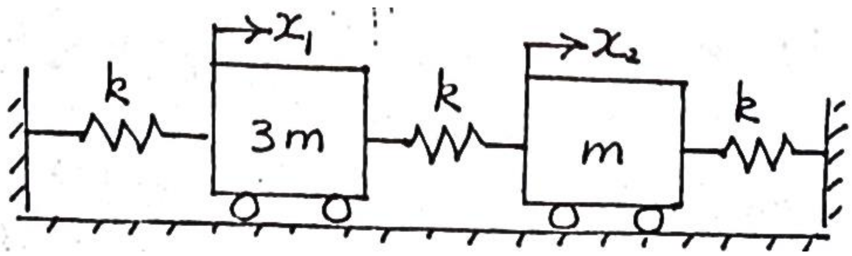
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (10)$$

و إذا كان الاهتزاز حراً فإن $Q_i = 0$ و بالتالي،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (11)$$

مثال(1):

استخدم طريقة لاقرينج لاستنتاج معادلتي الحركة للجهاز الموضَّح أدناه.



$$T = \tfrac{1}{2}(3m)\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}(m)\dot{x}_1^2$$

$$U = \tfrac{1}{2}k\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}k\,(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{1}{2}k\,x_2^2$$

$$L = T - U$$

$$= \tfrac{3}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}k\,x_1^2 - \tfrac{1}{2}k\,(x_1 - x_2)^2 - \tfrac{1}{2}k\,x_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 3m\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 3m\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$$

$$3m\,\ddot{x}_1+k\,x_1+k\left(x_1-x_2\right)=0$$

$$3m\ddot{x}_1+2k\,x_1-kx_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\,\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=m\,\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=k\left(x_1-x_2\right)+k\,x_2$$

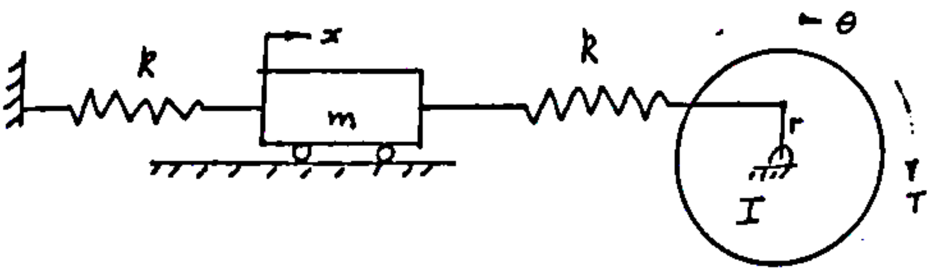
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$$

$$m\,\ddot{x}_2-k\left(x_1-x_2\right)+kx_2=0$$

$$m\ddot{x}_2+2k\,x_2-kx_1=0 \qquad (2)$$

مثال(2):

باستخدام طريقة لاقرينج، استنتج معادلتي الحركة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$U=\tfrac{1}{2}k\,x^2+\tfrac{1}{2}k\left(x-r\theta\right)^2$$

$$L=T-U$$

$$L=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\tfrac{1}{2}k\,x^2-\tfrac{1}{2}k\left(x-r\theta\right)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\,\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx-k(x-r\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \overline{x}_1}=0$$

$$m\ddot{x}_1+k\,x+k(x-r\theta)=0$$

$$m\ddot{x}+2k\,x-k\,r\theta=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=I\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=I\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=k\,r(x-r\,\theta)$$

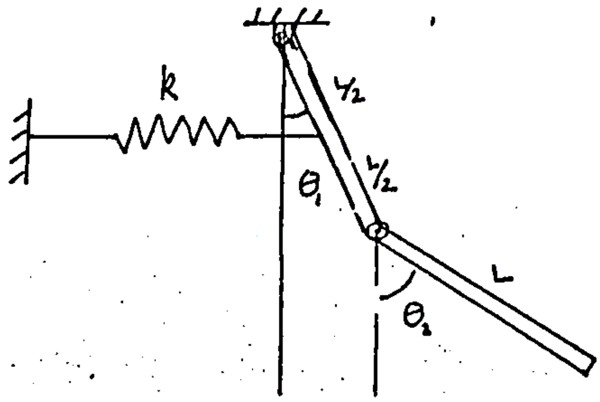
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=Q_2$$

$$I\,\ddot{\theta}-kr(x-r\theta)=T$$

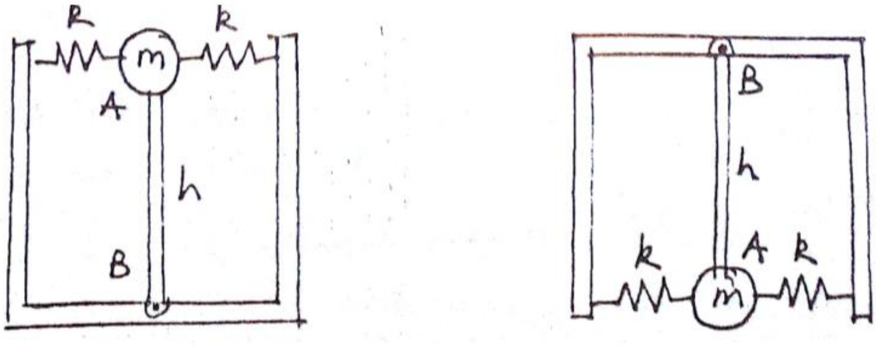
$$I\,\ddot{\theta}+k\,r\,\theta^2-k\,r\,x=T \qquad (2)$$

6.3 تمرين:

1. استخدم طريقة لاقرينج لإيجاد معادلتي الاهتزاز للجهاز الذي يتكون من قضيبين الموضَّح في الرسم أدناه.

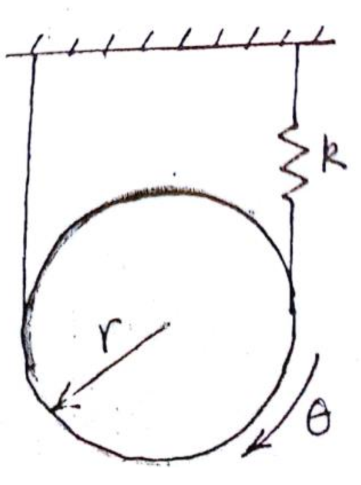


2. كتلـة m تتصـل بالقضـيب AB و اليـايين كمـا فـي الرسـم أدنـاه. باسـتخدام طريقـة لاقـرينج استنتج معادلـة الحركة. تجاهل كتلة القضيب.



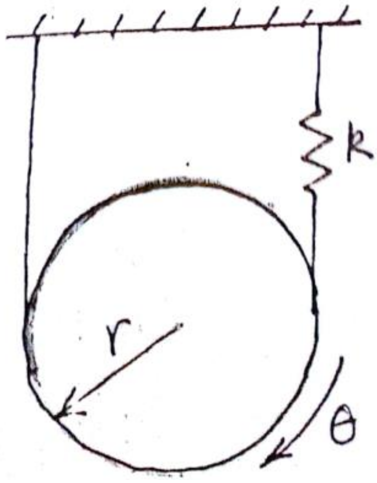
Ans. $\left[\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{m}-\frac{g}{h}\right)\theta=0 \quad (\text{ب}) \qquad \ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{m}+\frac{g}{h}\right)\theta=0 \quad (\text{أ})\ \right]$

3. أسطوانة كتلتها m و نصف قطرها r معلَّقة من حبل ملفوف حولها كما في الرسم أدناه. أحد طرفي الحبل مثبَّت إلي مسند جاسئ بينما الطرف الآخر يتصل بياي له ثابت k. استخدم طريقة لاقرينج لاستنتاج معادلة الحركة.



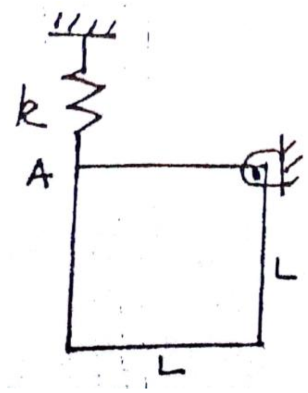
Ans. $\left[\ddot{\theta}+\frac{8k}{3m}\theta=0\right]$

4. سير ملفوف حول قرص كتلته M كما في الرسم أدناه. كتلة m معلقة من أحد طرفي السير بينما الطرف الآخر يتصل بياي له ثابت k. إذا أزيحت الاسطوانة ثم أطلقت، استنتج معادلتي الحركة باستخدام طريقة لاقرينج.



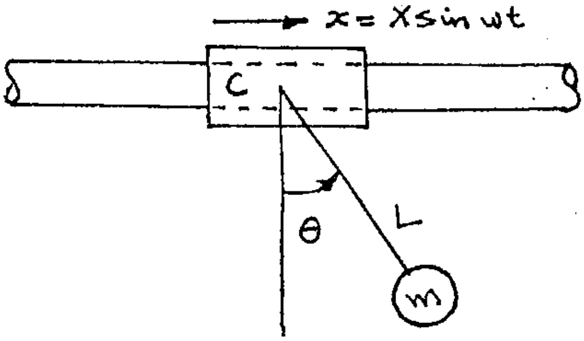
Ans. $\left[\ddot{x}+\frac{2k}{2m+M}x=0\right]$

5. لوح مربع منتظم كتلته m محمول في مستوي أفقي بواسطة مسمار عند النقطة B و يتصل عند النقطة A بياي له ثابت k. إذا منح الركن A إزاحة صغيرة ثم أطلق، أوجد الزمن الدوري للحركة استخدم طريقة لاقرينج.



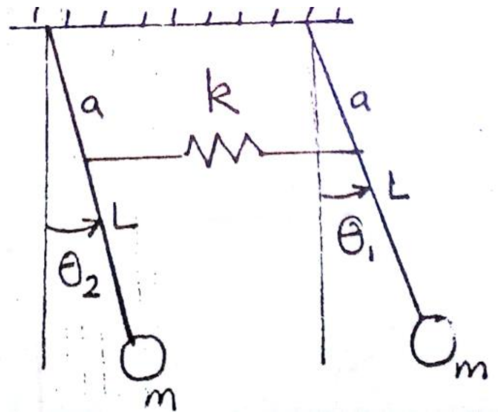
Ans. $\left(T=2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}\right)$

6. رقّاص بسيط طوله L معلق من جلبة C تتحرك قسرياً في اتجاه أفقي حسب القانون $x = X\sin\omega t$. باستخدام طريقة لاقرينج، أوجد مدي قيمة ω التي تؤدي إلي تجاوز سعة حركة الرقّاص 2X (افترض X صغيرة بالمقارنة بطول الرقّاص L).



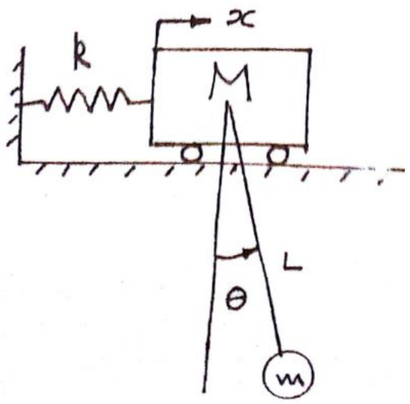
Ans. $\left(\sqrt{\frac{g}{2L}} \text{———} \sqrt{\frac{3g}{2L}}\right)$

7. رقَّاصان يتصلان بواسطة ياي ضعيف له ثابت k و لا يكون مشدوداً عندما يكون الرقَّاصان عاموديين. استخدم طريقة لاقرينج لاستنتاج معادلة الحركة.



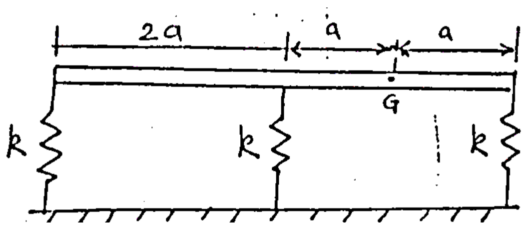
$$Ans.\left[mL^2\ddot{\theta}_1 + \left(k\,a^2 + mgL\right)\theta_1 - k\,a^2\theta_2 = 0\right.$$
$$\left.mL^2\ddot{\theta}_2 + \left(k\,a^2 + mgL\right)\theta_2 - k\,a^2\theta_1 = 0\right]$$

8. أوجد الذبذبتين الطبيعيتين للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه. الكتلة M= 438 kg تتحرك أفقياً. الرقَّاص يتصل بالكتلة بواسطة محور ارتكاز بدون احتكاك. طول الرقَّاص L = 229 mm و الكتلة m = 18.1 kg يمكن اعتبارها مركزة عند الطرف الحر. ثابت الياي k = 17.5 kN/m.



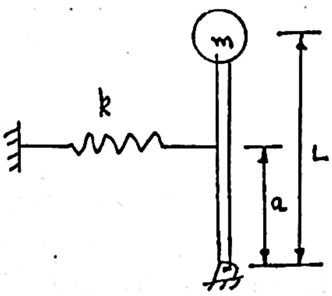
$$Ans.\left[(M+m)\ddot{x}+mL\left(\ddot{\theta}-\dot{\theta}^2\theta\right)+kx=0\ ,\quad L\ddot{\theta}+\ddot{x}+g\theta=0\right.$$
$$\left. f_1=1.137\ Hz\quad ,\quad f_2=0.923Hz\right]$$

9. جسم جاسئ كتلته m محمول على ثلاثة يايات على أبعاد متساوية و لكل ياي ثابت k . مركز الكتلة G في منتصف المسافة بين يايين. نصف قطر الدوران حول محور قائم على مستوي الرسم عبر G مقداره a. في موضع الاتزان يكون الجسم أفقياً. أوجد الذبذبتين الطبيعيتين للاهتزاز الرأسي. استخدم طريقة لاقرينج.



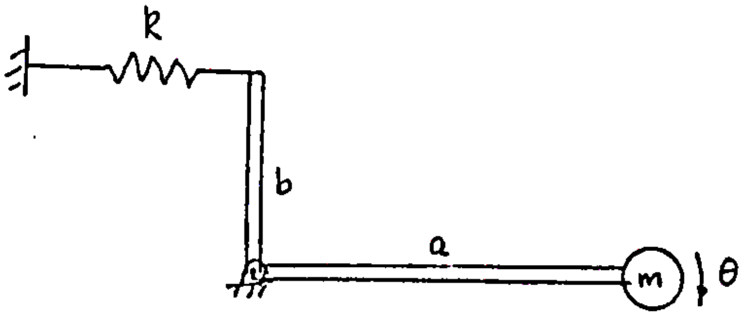
$$\text{Ans.}\left(\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{6k}{m}}\right)$$

10. باستخدام طريقة لاقرينج، استنتج معادلة الحركة للجهاز أدناه.



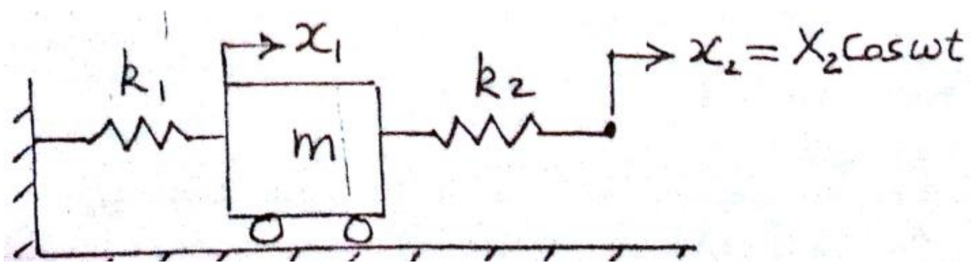
$$\text{Ans.}\left[\ddot{\theta}+\left(\frac{ka^2}{mL^2}-\frac{g}{L}\right)\theta=0\right]$$

11. استنتج معادلة الحركة للجهاز أدناه بطريقة لاقرينج.



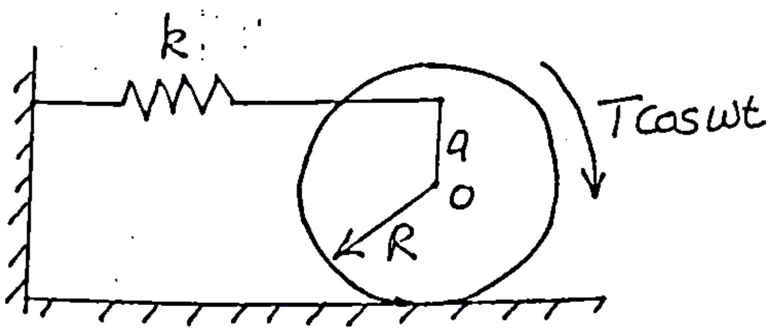
$$\text{Ans.}\left[\ddot{\theta}+\left(\frac{kb^2}{ma^2}-\frac{g}{a}\right)\theta=0\right]$$

12. بطريقة لاقرينج، استنتج معادلة الحركة للجهاز أدناه.



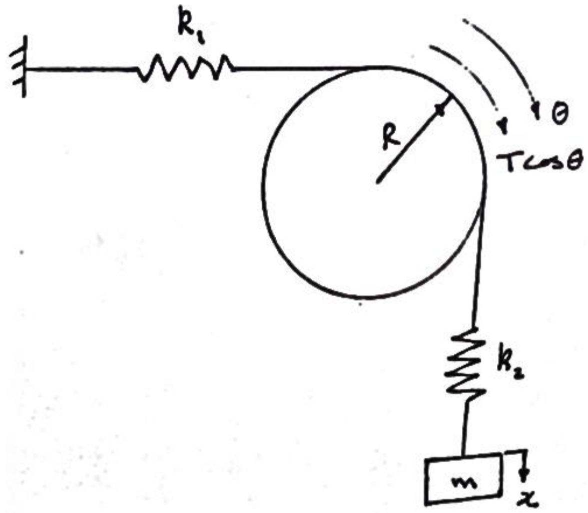
Ans. $\left[m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1=k_2x_2\cos\omega t\right]$

13. قرص دائري منتظم كتلته m و نصف قطره R يهتز حول موضع الاتزان. القرص محكوم بياي له ثابت k كما في الرسم أدناه. باستخدام طريقة لاقرينج، استنتج معادلة الحركة للاهتزاز القسري.



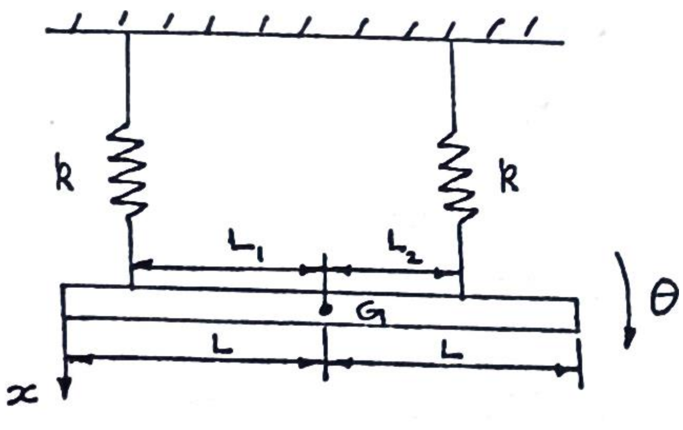
Ans. $\left[\frac{2mR^2}{2}\ddot{\theta}+k\left(R^2+a^2\right)^2\theta=T\cos\omega t\right]$

14. بكرة لها عزم قصور ذاتي حول محور الدوران I، و محكوم بياي أفقي له ثابت k_1 كما موضَّح في الرسم أناه. هنالك ياي آخر له ثابت k_2 معلق عليه كتلة m. باستخدام معادلة لاقرينج، استنتج معادلة الحركة عندما يتم تسليط عزم على البكرة مقداره $T\cos\omega t$.



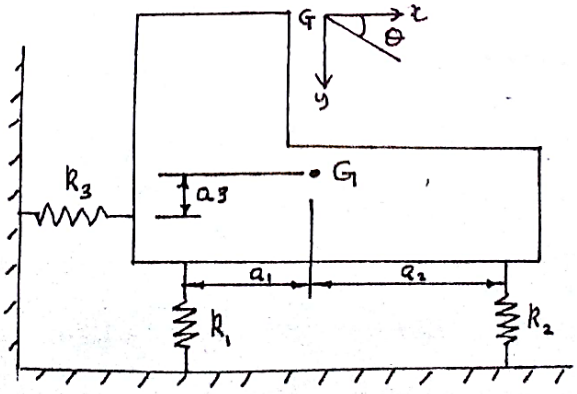
Ans. $\left[I\ddot{\theta}+k_1R^2\theta+k_2R(R\theta-x)=T\cos\omega t,\qquad m\ddot{x}-k_2R(R\theta-x)=0\right]$

15. قضيب منتظم كتلته m و طوله 2L معلق كما في الرسم أدناه. في موضع الاتزان يكون القضيب أفقياً. إذا كانت $L_1=\frac{5L}{6}$ و $L_2=\frac{2L}{3}$ ، استخدم طريقة لاقرينج لاستنتاج معادلتي الحركة. استخدم الإحداثيتين x و θ.



Ans. $\left[m\ddot{x}+2kx-\frac{kL}{6}\theta=0,\qquad mL\ddot{\theta}+2kx+\frac{41}{12}kL\theta-\frac{1}{2}kx=0\right]$

16. آلية متماثلة لها كتلة m و عزم قصور ذاتي حول محور قائم على مستوي الشكل و يمر بمركز الكتلة مقداره I. على اعتبار أنَّ الاهتزازات صغيرة في مستوي التماثل، و باستخدام الإحداثيات x , y , θ استنتج معادلات الحركة.

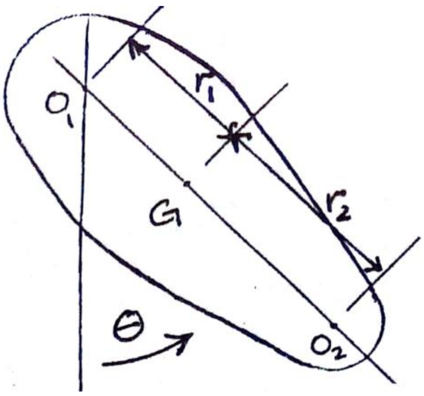


$$Ans.\left[m\ddot{x}+k_3\left(x-a_3\theta\right)=0,\quad m\ddot{y}+\left(k_1+k_2\right)y+\left(k_2a_2-k_1a_1\right)\theta=0,\right.$$
$$\left.I\ddot{\theta}+\left(k_1a_1^2+k_2a_2^2+k_3a_3^2\right)\theta+\left(k_2a_2-k_1a_1\right)y-k_3a_3x=0\right]$$

17. رقَّاص مركب كتلته m و مركز كتلته G و نصف قطر الدوران حول محور يمر بمركز الكتلة r. تم تعليق الرقَّاص بحرية في المرة الأولي من النقطة O_1، و في المرة الثانية من النقطة O_2. هب أن $r_1 \neq r$.

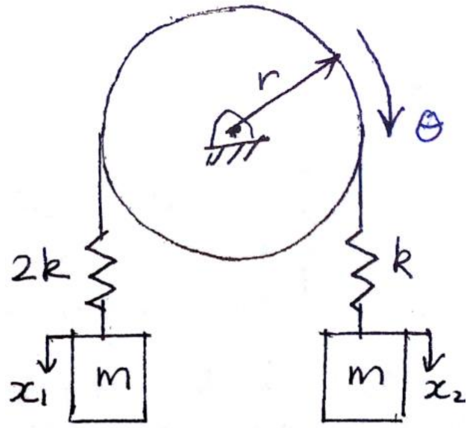
(أ) باستخدام معادلة لاقرينج استنتج معادلات الحركة لكل تعليق.

(ب) أوجد العلاقة بين r_1 و r_2 و التي تجعل الذبذبة الناجمة من اهتزاز بسيط لكلا التعليقين متساوياً.



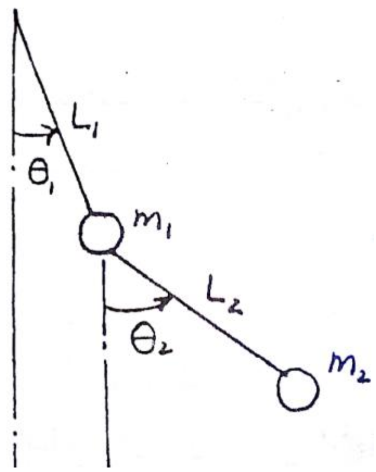
$$\text{Ans.}\left[I_1\ddot{\theta}+m\,g\,r_1\,\theta=0,\quad I_2\ddot{\theta}+m\,g\,r_2\,\theta=0,\quad r_1r_2=r^2\right]$$

18. بكرة نصف قطرها r و لها عزم قصور ذاتي حول محور الدوران I، تحمل كتلتين متساويتين m بواسطة يايين لهما ثابتان 2k, k . و اليايان بدورهما يتصلان بحبل يمر عبر البكرة. لنفترض أن الكتلتين تتحركان إلي أعلي و أسفل فقط بينما البكرة بإمكانها الدوران بحرية. باستخدام معادلة لاقرينج، استنتج معادلات الحركة.



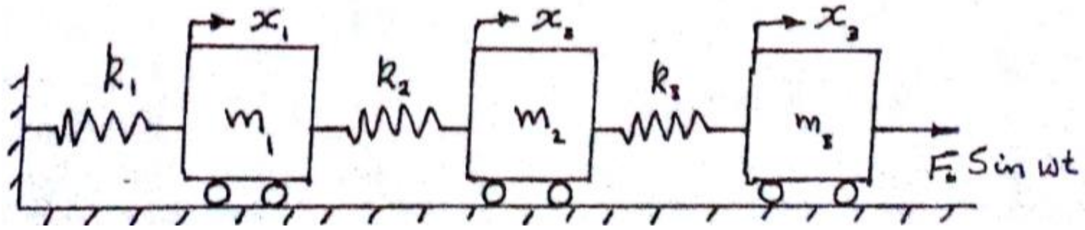
$$Ans.\left[m\ddot{x}_1 + 2k\left(x_1 + r\theta\right) = 0, \qquad m\ddot{x}_2 + 2k\left(x_2 - r\theta\right) = 0,\right.$$
$$\left. I\ddot{\theta} + 3kr^2\theta + krx_1 - krx_2 = 0\right]$$

19. باستخدام معادلة لاقرينج، استنتج معادلتي الحركة للرقّاص المزدوج الموضّح في الرسم أدناه. افترض ازاحات صغيرة.



$$Ans.\left[\left[(m_1 + m_2)L_1 + m_2L_2\right]\ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)\, g\theta_1 = 0,\right.$$
$$\left. L_2\ddot{\theta}_2 + L_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 = 0\right]$$

20. استخدم معادلة لاقرينج لاستنتاج معادلات الحركة القسرية للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



$$Ans.\left[m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0,\right.$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_1 x_1 - k_3 x_3 = 0,$$
$$\left.m_3\ddot{x}_3 + k_3 x_3 - k_3 x_2 = F_o \sin \omega t\right]$$

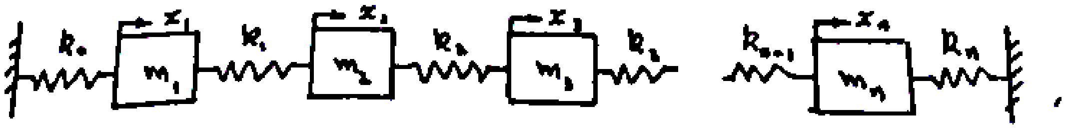
الفصل السابع

طريقة هولزر

(Holtzer Method)

كثير من الأجهزة يمكن تمثيلها بأجهزة ذات عناصر منفصلة، و بالتالي يسهل إيجاد ذبذباتها الطبيعية وأنماط اهتزازها. ومن الطرق التقريبية المستخدمة طريقة هولزر. وهذه الطريقة يمكن استخدامها لحساب الذبذبة و نمط الاهتزاز الحر غير المتضائل. أنها تبدأ بافتراض ذبذبة معينة و سعة ذبذبة مقدارها واحد عند أحد طرفي الجهاز ثم نقوم بحساب القوي و الازاحات بالتدريج عنصر بعد الآخر حتى الطرف الثاني للجهاز. الذبذبة التي تؤدي إلي تحقيق الحالة الطرفية تكون هي الذبذبة الطبيعية للجهاز. هنالك ثلاثة أنوع من الأجهزة من حيث الحالات الطرفية:

(I) جهاز مثبت من الطرفين:



معادلات الحركة،

$$m_1\ddot{x}_1 + k_o x_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0 \qquad (2)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_3 - x_4) = 0 \qquad (3)$$

....

$$m_n\ddot{x}_n + k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \ + \ k_n x_n = 0 \qquad (4)$$

عوِّض (i = 1 , 2 , 3, ...n) $\qquad x_i = X_i \sin\omega t$

من المعادلة (1)،

$$X_2 = X_1 + \frac{1}{k_1}\left[k_o X_1 - \omega^2 m_1 X_1\right] \qquad (5)$$

من المعادلة (2)،

$$X_3 = X_2 + \frac{k_1}{k_2}\left[X_2 - X_1\right] - \frac{\omega^2 m_2 X_2}{k_2}$$

عوِّض X_2 من المعادلة (5) في الحد الثاني على اليمين،

$$X_3 = X_2 + \frac{1}{k_2}\left[k_o X_1 - \omega^2 \sum_{j=1}^{2} M_j X_j\right]$$

و بنفس المتابعة يمكن الحصول على X_4،

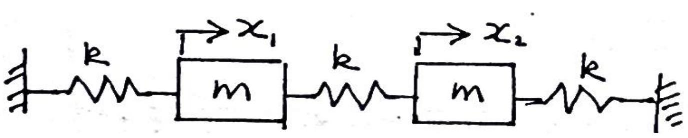
$$X_4 = X_3 + \frac{1}{k_3}\left[k_o X_1 - \omega^2 \sum_{j=1}^{3} M_j X_j\right]$$

و بصيغة عامة،

$$X_{i+1} = X_i + \frac{1}{k_i}\left[k_o X_1 - \omega^2 \sum_{j=1}^{i} M_j X_j\right] \qquad (i = 1,2,3,\ldots)$$

مثال(1):

باستخدام طريقة هولزر، أوجد الذبذبة الأساسية للجهاز الموضَّح في الرسم و كذلك نمط الاهتزاز المقابل لتلك الذبذبة. $k = 1$, $m = 1$. أبدأ بـ $\omega = 0.3$ و لتكن الخطوة $\Delta\omega = 0.3$.



$$\Delta X = \frac{1}{k_i}\left[k_o X_1 - \omega^2 \sum_{j=1}^{i} M_j X_j\right]$$

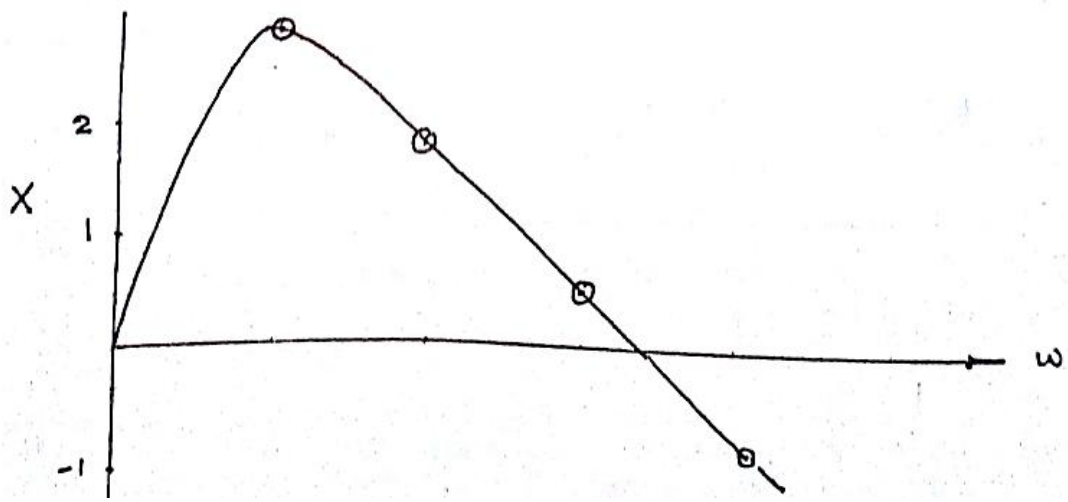
ω	i	X_i	X_i	$\sum M_j X_j$	$\omega^2 \sum M_j X_j$	ΔX
0.3	1 2	1.0 1.91	1.0 1.0	1.0 2.91	0.09 0.2619	0.91 0.7381

	3	2.6481				
0.6	1	1.0	1.0	1.0	0.36	0.64
	2	1.64	1.0	2.64	0.9504	0.0469
	3	1.6896				
0.9	1	1.0	1.0	1.0	0.81	0.19
	2	1.19	1.0	2.19	1.7739	-0.7739
	3	0.4161				
1.2	1	1.0	1.0	1.0	1.44	-0.44
	2	0.56	1.0	1.56	2.2464	-1.2464
	3	-0.6864				
1.0	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
	2	1.0	1.0	2.0	2.0	-1.0
	3	0.0				

من الواضح أنَّ $X_3 = 0$ تحدث في المدى $0.9 < \omega < 1.2$.

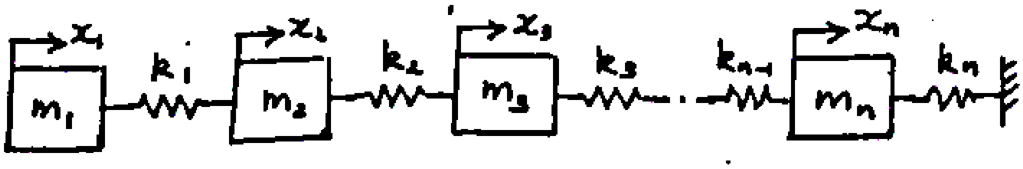
عن طريق رسم منحني $X_3 - \omega$ أو خلافه يمكن إيجاد الذبذبة الطبيعية الأساسية 1.0 ، و نمط الاهتزاز من الجدول الملحق. أي

$$[X_1 \ X_2]^T = [1.0 \quad 1.0]^T$$



لإيجاد الذبذبة الثانية واصل رسم المنحني حتى يقاطع محور ω مرة أخري.

(II) جهاز مثبت من طرف و حر من الطرف الآخر:

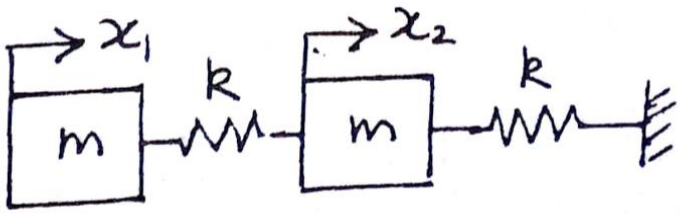


الفرق بين هذا الجهاز و الذي سبقه هو أن $k_o = 0$ وبالتالي فإنَّ،

$$X_{i+1} = X_i - \frac{\omega^2}{k_i}\sum_{j=1}^{i} M_j X_j \qquad (i = 1,2,3,\ldots)$$

مثال(2):

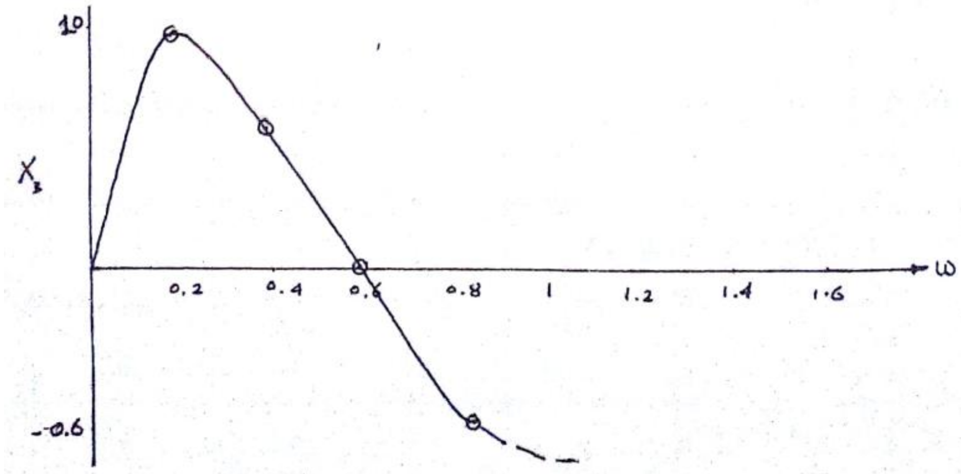
أوجد الذبذبة الطبيعية الأساسية و نمط الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه. خذ $k = 1$ و $m = 1$ و البداية $\omega = 0.2$ و الخطوة $\Delta\omega = 0.2$.



$$\Delta X = \frac{\omega^2}{k_i}\sum_{j=1}^{i} M_j X_j$$

ω	i	X_i	M_i	$\sum M_j X_j$	k_i	ΔX
0.2	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.04
	2	0.96	1.0	1.96	1.0	0.0784
	3	0.8816				
0.4	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.16
	2	0.84	1.0	1.84	1.0	0.2944
	3	0.5456				
0.6	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.36
	2	0.64	1.0	1.64	1.0	0.5904
	3	0.0496				
	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.64
	2	0.36	1.0	1.36	1.0	0.9704

0.8	3	-0.5104				

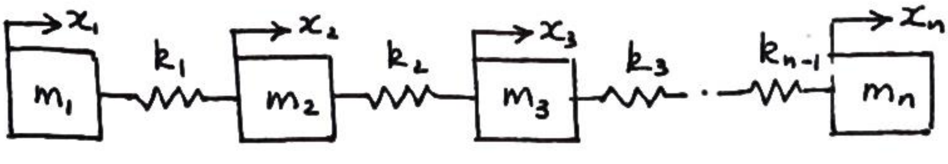


لاحظ أن $X_3 = 0$ في المدى $0.6 < \omega < 0.8$ و من المنحني نحصل علي

0.62	1 2 3	1.0 0.62 0.0	1.0 1.0	1.0 1.62	1.0 1.0	0.38 0.62

$$\lfloor X_1 \ X_2 \rfloor = [1.0 \quad 0.62]$$

(III) جهاز حر من الطرفين:



معادلات الحركة

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - x_3) = 0 \qquad (2)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_3 - x_4) = 0 \qquad (3)$$

....

$$m_n\ddot{x}_n + k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \qquad (4)$$

من المعادلة (1)،

$$k_1(X_2 - X_1) = -m_1\omega^2 X_1 \qquad (5)$$

$$X_2 = X_1 - \frac{m\omega^2 X_1}{k_1} \qquad (6)$$

من المعادلة (2)،

$$-m_2\omega^2 X_2 + k_1(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X_3) = 0$$

عوِّض (5) لتحصل على،

$$k_2(X_3 - X_2) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{2} M_j X_j$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2}\sum_{j=1}^{2} M_j X_j$$

و هكذا دواليك حتى نصل إلي،

$$k_{n-1}(X_n - X_{n-1}) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} M_j X_j$$

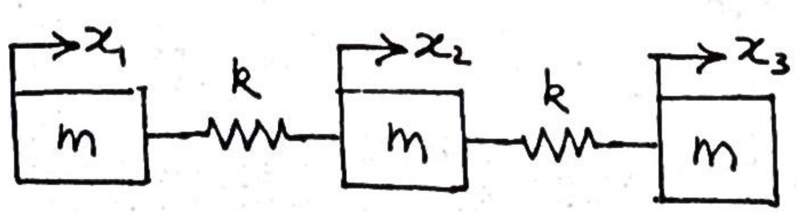
و بعد التعويض في المعادلة (4) نحصل علي،

$$\sum_{j=1}^{n} M_j X_j = 0$$

$$X_{i+1} = X_i - \frac{\omega^2}{k_i}\sum_{j=1}^{i} M_j X_j$$

مثال(3):

استخدم طريقة هولزر لإيجاد الذبذبة الطبيعية الأولي للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه. خذ m = 1 و k = 1. خذ البداية $\omega = 0.3$ و الخطوة $\Delta\omega = 0.3$. أرسم شكل الاهتزاز.



ω	i	X_i	M_i	$\sum M_j X_j$	k_i	$\Delta X = \frac{\omega^2}{k_i}\sum M_j X_j$
0.3	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.09
	2	0.91	1.0	1.91	1.0	0.1719
	3	0.7381	1.0	2.6481		
0.6	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.36
	2	0.64	1.0	1.64	1.0	0.5904
	3	0.0496	1.0	1.6896		
0.9	1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.81
	2	0.19	1.0	1.19	1.0	0.9639
	3	-0.7739	1.0	0.4161		
1.2	1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.44
	2	-0.44	1.0	0.65	1.0	0.8064
	3	-1.2464	1.0	-0.6864		

الكمية $\sum M_j X_j$ تحولت من الموجب إلي السالب و بالتالي فإن الذبذبة الأساسية تقع في المدى $0.9 < \omega < 1.2$. و من المنحني $\omega - \sum_j X_j$ نستطيع أن نقدر الذبذبة المطلوبة و هي 1.0 .

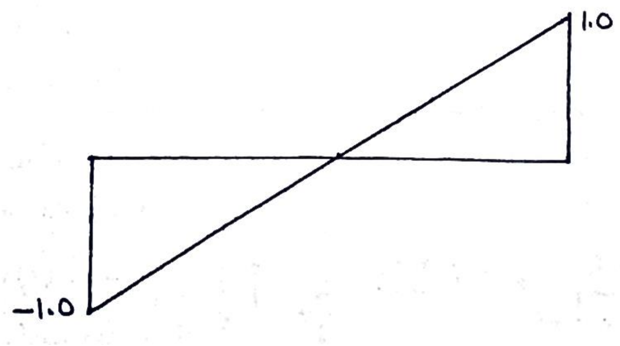
و نلاحظ في هذه الحالة،

1.0	1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	2	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	3	−1.0	1.0	0.0		

و بالتالي فإن نمط الاهتزاز،

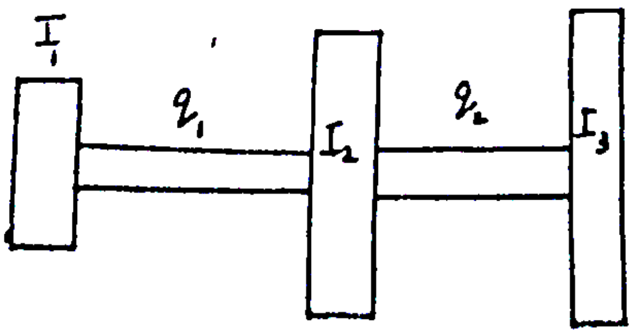
$$[X_1 \quad X_2 \quad X_3] = [1.0 \quad 0.0 \quad -1.0]$$

و شكل الاهتزاز،



7.2 تمرين:

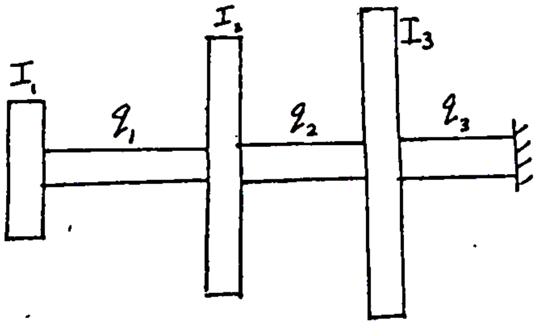
1. باستخدام طريقة هولزر، أوجد الذبذبة الطبيعية الأساسية و نمط الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه و الذي يتكون من ثلاثة أقراص محمولة على عمود. q_1=100kNm/rad ، q_2=200kNm/rad ، $I_3 = 22\text{kgm}^2$ $I_1 = 5\text{kgm}^2$, $I_2 = 11\ \text{kgm}^2$. أبدأ من $\omega = 20\,\text{rad/s}$ و خذ الخطوة $\Delta\omega = 20\,\text{rad/s}$.



Ans. $(\omega_1 = 123.7\,rad/s, [X_2 \ X_2 \ X_3] = [1, 0.24, -0.34])$

2. أوجد الذبذبة الطبيعية الأساسية و نمط الاهتزاز للجهاز الموضَّح أدناه و الذي يتكون من ثلاثة أقراص مركبة على عمود .

$I_1 = 15 kgm^2$, $I_2 = 20 kgm^2$ ، $I_3 = 40 kgm^2$ ، q_1=2MNm/rad ، q_2=2MNm/rad ، q_3=3MNm/rad . أبدأ من $\omega = 40 rad/s$ و خذ الخطوة $\Delta\omega = 30 rad/s$

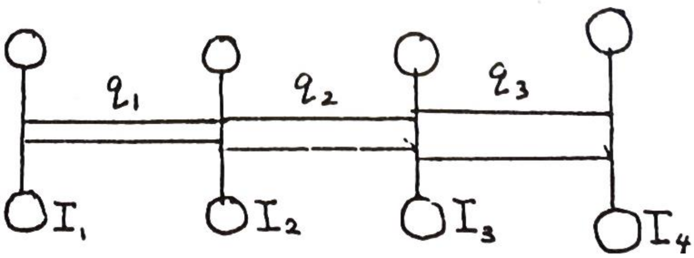


Ans. (160 rad/s)

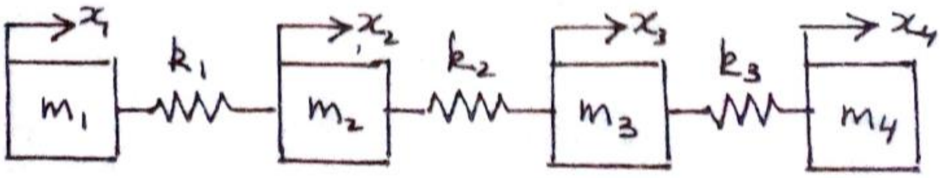
3. باستخدام طريقة هولزر، أوجد الذبذبتين الطبيعيتين الأوليتين لجهاز الالتواء الموضّح في الرسم أدناه.

$I_1 = I_2 = I_3 = 1.13$ kgm^2 , $I_4 = 2.26$kgm^2 ، $q_1=q_2$ =169 k Nm/rad

. q_3 = 226 k Nm/rad



4. باستخدام طريقة هولزر أوجد الذبذبات الطبيعية و أنماط الاهتزاز للجهاز الموضّح في الرسم أدناه. الكتل متساوية و كذلك ثوابت اليايات. حاول كتابة برنامج بأحد لغات الحاسوب لحل هذه المسالة.



الفصل الثامن

أجهزة ذات درجات حرية متعددة

8.1 مدخل:

هذه الأجهزة لها أكثر من درجة حرية واحدة و أقل من عدد لا نهائي من درجات الحرية. و أي جهاز درجات حريته n ، فسيكون عدد المعادلات المطلوبة لوصف حركته n. فإذا كان عدد درجات حرية جهاز ما بدون مضاءلة 2، فمن السهل إيجاد ذبذبتيه الطبيعيتين و كذلك نمطي اهتزازه. غير أنَّ الوضع يصبح أكثر تعقيداً كلما زادت درجات الحرية عن اثنتين بسبب الزيادة المطردة في عدد الحدود. و أفضل طريقة لوصف حركة مثل هذه الأجهزة هي المصفوفات.

8.2 قيم ايقن و متجهات ايقن:

يمكن كتابة معادلات الحركة الحرة بدون مضاءلة لجهاز له عدة درجات من الحرية هكذا

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \qquad (1)$$

حيث أن [M] مصفوفة الكتلة و [K] مصفوفة الكزازة ، و $\{x\}$ متجه الازاحات و هي كما يلي:

$$[M]=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & .... & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & .... & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & .... & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & ...... & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\{x\}^T=[x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n]$$

إذا ضربنا المعادلة (1) سابقاً في $[M]^{-1}$ سنحصل علي الحدين التاليين

$$[M]^{-1}[M]=[\,I\,] \qquad [M]^{-1}[K]=[\,A]$$

حيث أنَّ [I] مصفوفة أحادية و [A] مصفوفة الجهاز. و بالتالي يمكن كتابة المعادلة (1) هكذا،

$$[A]\{x\}+[I]\{\ddot{x}\}=0$$

و على افتراض أن $\{\ddot{x}\}=-\lambda\{x\}$ حيث أنَّ $\lambda=\omega^2$ نحصل على،

$$[A-\lambda I]\{X\}=0 \qquad (2)$$

و بالطبع لأن $\{X\}\neq 0$ فإنَّ،

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (3)$$

جذور المعادلة (3) تسمي قيم ايقن، و الذبذبات الطبيعية للجهاز يمكن حسابها من العلاقة $\lambda_i=\omega_i^2$ و بتعويض λ_i في المعادلة (2) نحصل علي متجه ايقن و لهذا فإنه إذا كان للجهاز n درجة حرية ، فسيكون له n قيم ايقن و مثلها متجهات ايقن . و يمكن إيجاد متجهات ايقن من المصفوفة القرين (adjoint matrix) للجهاز. فمثلاً إذا استخدمنا التسمية المختصرة الآتية:

$$[B]=[\,A-\lambda I\,]$$

فإن مقلوب [B] هكذا،

$$[B]^{-1}=\frac{1}{|B|}adj[B]$$

إذا ضربنا مسبقاً بـ [B] |B| نحصل علي،

$$|B|[I]=[B]adj[B]$$

و بالمسميات الأصلية،

$$|A-\lambda|[I]=[A-\lambda I]adj[A-\lambda I]$$

و الآن إذا كان $\lambda=\lambda_i$ قيمة ايقن ، فإن المحددة على اليسار تصبح صفرية. أي

$$[A-\lambda_i I]adj[A-\lambda_i I]=0$$

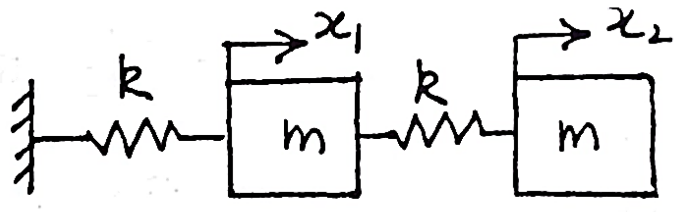
هذه العلاقة صالحة لجميع قيم λ_i و تمثل عدد n معادلة لجهاز له عدد n درجة حرية. مقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (2) يقود إلي،

$$adj\left[A-\lambda_i I\right]=\left[X\right]_i$$

حيث أن $[X]_i$ مصفوفة تتكون من أعمدة متشابهة للنمط $\{X_i\}$. أي أنَّ المصفوفة المرافقة $adj\left[A-\lambda_i I\right]$ تتكون من أعمدة كل منها عبارة عن متجه أيقن $\{X_i\}$ (مضروب في عدد غير محدد).

مثال(1):

أوجد الذبذبتين الطبيعيتين و نمطي الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



يمكن استنتاج المصفوفات التالية،

$$[M]=m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad [K]=k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=[M]^{-1}[K]=p^2\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \; p^2=\frac{k}{m}$$

$$[A-\lambda I]\{x\}=0$$

$$\begin{bmatrix}2p^2-\lambda & -p^2\\ -p^2 & p^2-\lambda\end{bmatrix}\{X\}=0 \qquad (4)$$

$$\left(2p^2-\lambda\right)\left(p^2-\lambda\right)-p^4=0$$

$$\lambda_1 = 0.38p^2 \;,\; \lambda_2 = 2.62p^2$$

و بالتالي فإنَّ الذبذبتين الطبيعيتين هما،

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.62\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.62\sqrt{\frac{k}{m}}$$

لإيجـــاد متجهـــات ايقـــن إمـــا أن نعـــوِّض λ_1 , λ_2 فـــي المعادلـــة (4) أو عـــن طريـــق $adj[A-\lambda I]=[X]$ ،

$$adj[A-\lambda I]=\begin{bmatrix} p^2-\lambda & p^2 \\ p^2 & 2p^2-\lambda \end{bmatrix}$$

عوِّض $\lambda_1 = 0.38p^2$ لنحصل بعد القسمة على p^2 ،

$$\begin{bmatrix} 0.62 & 1 \\ 1 & 1.62 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

و عندما نعوِّض $\lambda_2 = 2.62p^2$ نحصل على،

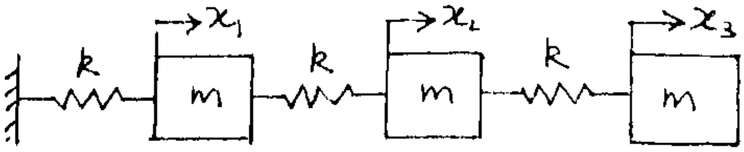
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -1.62 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التي تحتوي على أنماط الاهتزاز على شكل أعمدة تسمي مصفوفة المودال (المصفوفة النمطية) (Modal matrix).

$$[X]=\begin{bmatrix} 0.62 & -1.62 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

أوجد أنماط الاهتزاز للجهاز الموضَّح أدناه.



$$[M]=m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[K]=k\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A=[M]^{-1}[K]=\frac{k}{m}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[A-\lambda I]\{x\}=0$$

$$|A-\lambda I|\begin{vmatrix}2p^2-\lambda&-p^2&0\\-p^2&2p^2-\lambda&-p^2\\0&-p^2&p^2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

بعد تبسيط هذه المعادلة نحصل على،

$$\lambda^3-5p^2\lambda^2+6p^4\lambda-p^6=0$$

هذه المعادلة من الدرجة الثالثة و بالتالي يصعب تحليلها، و لكن بالمحاولة و الخطأ يمكن إيجاد جذورها و هي.

$$\lambda_1=0.198p^2\ ,\ \lambda_2=1.555p^2\ ,\lambda_3=3.247p^2$$

و عليه تصبح الذبذبات الطبيعية كما يلي،

$$\omega_1=0.445\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \omega_2=1.247\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\qquad \omega_3=1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

لإيجاد نمط الاهتزاز المقابل لقيم ايقن، نعوِّض في المعادلة $[A-\lambda I]\{X\}=0$ أو في مصفوفة القرين $adj[A-\lambda I]$ ،

$$adj[A-\lambda I]=\begin{bmatrix} (2p^2-\lambda)(p^2-\lambda)-p^4 & p^2(p^2-\lambda) & p^4 \\ p^2(p^2-\lambda) & (2p^2-\lambda)(p^2-\lambda) & p^2(2p^2-\lambda) \\ p^4 & p^2(2p^2-\lambda) & (2p^2-\lambda)^2-p^4 \end{bmatrix}$$

$$adj[A-\lambda_1 I]=\begin{bmatrix} 0.445 & 0.802 & 1.0 \\ 0.802 & 1.445 & 1.802 \\ 1.000 & 1.802 & 2.247 \end{bmatrix}$$

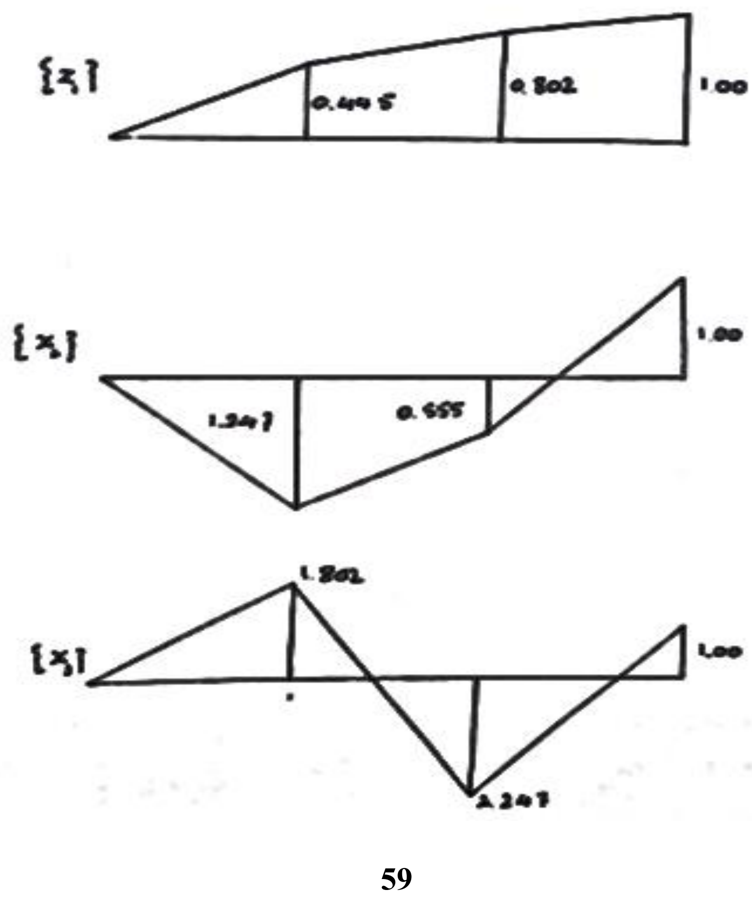
و بالتالي،

$$\{X_1\}=\begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.802 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

و بنفس الطريقة يمكن إيجاد $\{X_2\}$, $\{X_3\}$ لتصبح مصفوفة المودال،

$$[X]=\begin{bmatrix} 0.445 & -1.247 & 1.802 \\ 0.802 & -0.555 & -2.247 \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

أشكال الاهتزاز



أنماط الاهتزاز أو متجهات ايقن لأي جهاز يمكن التدليل على أنها متعامدة بالنسبة لمصفوفة الكتلة و الكزازة كما يلي. دع المعادلة للنمط i مع إسقاط الأقواس،

$$K X_i = \lambda_i M X_i$$

أضرب مسبقاً بمعكوس النمط j ،

$$X_j^T K X_i = \lambda_i \left(X_j^T M X_i\right) \qquad (1)$$

ثانياً نبدأ بالمعادلة للنمط j و نضرب مسبقاً بالنمط i،

$$X_i^T K Xj = \lambda_j \left(X_i^T M X_j\right) \qquad (2)$$

و لأن كل من M و K مصفوفة متماثلة، فإن العلاقة التالية تكون صحيحة

$$X_j^T M X_i = X_i^T M X_j$$
$$X_j^T K X_i = X_i^T K X_j$$

الآن أطرح المعادلة (2) من المعادلة (1)،

$$0 = \left(\lambda_i - \lambda_j\right) X_i^T M X_j$$

إذا كان $\lambda_i \neq \lambda_j$ ، فإن المعادلة السابقة تعني أنَّ،

$$X_i^T M X_j = 0 \qquad (3)$$

و بنفس الطريقة نحصل على،

$$X_i^T K X_j = 0 \qquad (4)$$

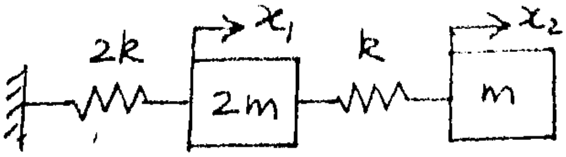
المعادلتان (3) و(4) تعرفان خاصية التعامد لأنماط الاهتزاز. أما إذا كان i=j فالمعادلتين (3) و (4) يمكن التعبير عنهما هكذا

$$X_i^T M X_j = M_i$$
$$X_i^T M X_j = K_i$$

حيث أنَّ M_i و K_i هما الكتلة العامة و الكزازة العامة .. هكذا يعرفان.

مثال(3):

برهِّن أن نمطي الاهتزاز للجهاز الموضَّح أدناه متعامدان.



$$[M]=\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}, \qquad [K]=\begin{bmatrix}3k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2m} & 0\\ 0 & \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix}\dfrac{3p^2}{2} & -\dfrac{p^2}{2}\\ -p^2 & p^2\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\dfrac{3p^2}{2}-\lambda & -\dfrac{p^2}{2}\\ -p^2 & p^2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda_1=\tfrac{1}{2}p^2, \qquad \lambda_2=2p^2$$

كما يمكن إيجاد النمطين و هما العامودان في المصفوفة التالية،

$$[X]=\begin{bmatrix}0.5 & -1.0\\ 1.0 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$X_1^T M\, X_2=[0.5 \quad 1.0]\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.0\\ 1.0\end{bmatrix}=0$$

كما يمكن التحقق من أنَّ،

$$X_1^T\, K\, X_2=0$$

عند وجود جذر متكرر في المعادلة، فإنَّ متجهات ايقن لا تكون مفردة، و أي تركيبة خطية من هذه المتجهات يمكن أن تحقق معادلة الحركة. و لتوضيح هذه النقطة دع X_1 و X_2 متجهان يتبعان قيمة ايقن واحدة λ_o بينما X_3 متجه ثالث يتبع λ_3 يختلف عن λ_o يمكن أن تكتب،

$$AX_1 = \lambda_o X_1$$

$$AX_2 = \lambda_o X_2$$

$$AX_3 = \lambda_3 X_3$$

أضرب المعادلة الثانية في الثابت b ثم أضفها للمعادلة الأولي لنحصل علي المعادلة التالية،

$$A(X_1 + bX_2) = \lambda_o (X_1 + bX_2)$$

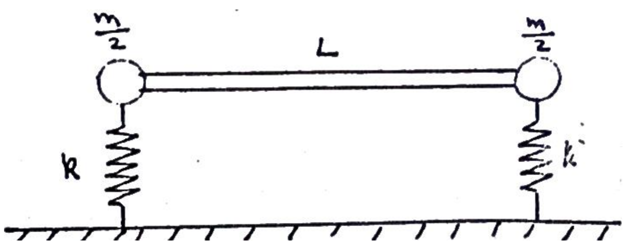
و هكذا فإن المتجه الجديد $X_{12} = X_1 + bX_2$ هو تركيبة خطية من المتجهين الأول و الثاني و هو أيضاً يحقق المعادلة،

$$AX_{12} = \lambda_o X_{12}$$

و عليه يمكن القول بأنه ليس هنالك نمط اهتزاز مفرد يقابل λ_o. لكن يجب أن نتذكر أن أية أنماط تقابل λ_o يجب أن تكون متعامدة للمتجه X_3 و ذلك لكي تكون أنماط اهتزاز.

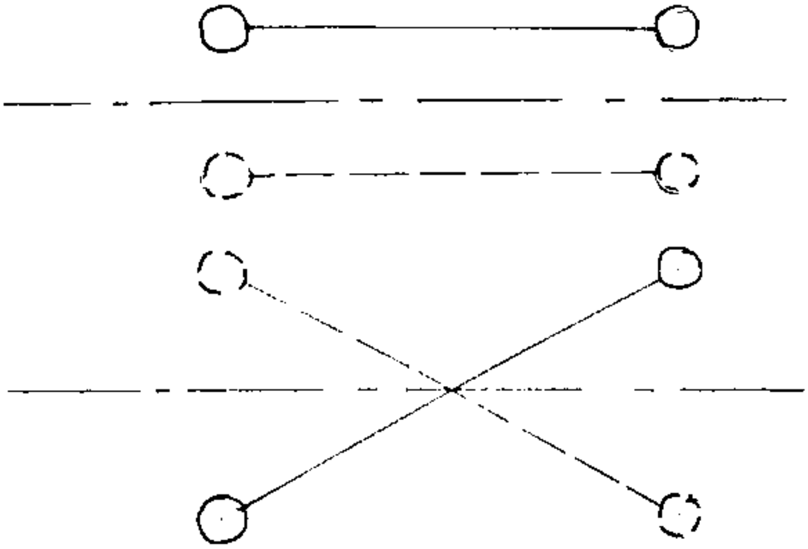
مثال(4):

خذ القضيب الموضَّح في الرسم أدناه حيث أن القضيب جاسئ و خفيف الوزن.



النمطين الأول و الثاني هما،

$$\{X\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \{X\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



أن نمطي الاهتزاز كما هو واضح خطي ودوران وهما متعامدان. الذبذبتان الطبيعيتان للنمطين متساويتان.

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

هذا المثال يبين أنَّ متجهات ايقن المختلفة قد تكون لها قيم ايقن متساوية.

مثال(4):

أوجد قيم ايقن و متجهات ايقن للمصفوفة التالية.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 1 \, , \, \lambda_2 = 1 \, , \, \lambda_3 = -2$$

$$adj[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & -(\lambda - 1) & \lambda - 1 \\ -(\lambda - 1) & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \lambda_3 = -2$$

$$adj[A - \lambda I_3] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \{X\}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعويض $\lambda = 1$ في المصفوفة يقود إلي مصفوفة صفرية، و لهذا نعود للمعادلة الأصلية،

$$[A - \lambda I]\{X\} = 0$$

$$-X_1 - X_2 + X_3 = 0$$

$$-X_1 - X_2 + X_3 = 0$$

$$X_1 + X_2 - X_3 = 0$$

و المعادلات الثلاث لا تعدو أن تكون معادلة واحدة هي $X_1 = X_3 - X_2$ و بالتالي،

$$\{X\}_1 = \begin{bmatrix} X_3 - X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنَّ $\{X_3\}^T \{X_1\} = 0$

عندما تكون $X_2 = X_3 = 1$ ،

$$\{X_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و عندما يكون $X_3 = 1$, $X_2 = -1$ ،

$$\{X_2\} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و الملاحظ أنَّ X_1 و X_2 غير متفردتين ، وبالتالي أي تجميع من X_1 و X_2 سيحقق المعادلة الأصلية.

8.3 مصفوفة المرونة:

يمكن كتابة معادلات الحركة لأي جهاز بدلالة المرونة هكذا. نفترض أنَّ للجهاز 3 درجات من الحرية.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

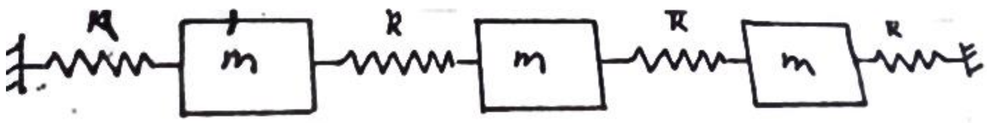
أو بشكل مختصر $\{X\} = [A]\{f\}$.

[A] مصفوفة المرونة. a_{ij} تعني الإزاحة عند المحطة i بسبب قوة مقدارها واحد مسلطة عند المحطة j . f_1, f_2, f_3 هي القوي العاملة عند المحطات 1 و 2 و 3 . و باستخدام مبدأ التراكب تم استنتاج معادلات الحركة و بالطبع

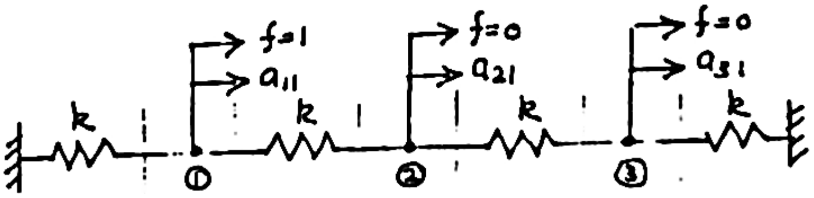
$$f_i = -m_i \ddot{x}_i = \omega^2 m_i x_i$$

مثال(5):

أوجد مصفوفة المرونة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



بتسليط حمل مقداره $f_1 = 1$ على الكتلة في أقصي اليسار (المحطة واحد) ، بينما القوي في المحطتين الأخريين تساوي صفراً، نحصل على،



معادلات الحركة

$$-ka_{11}-k(a_{11}-a_{21})+1=0$$

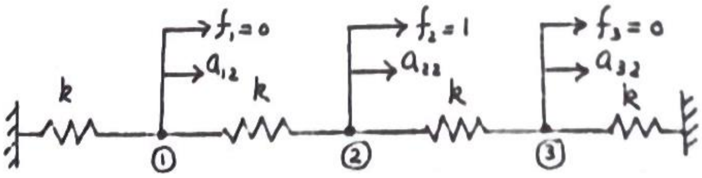
$$-k(a_{21}-a_{11})-k(a_{21}-a_{31})=0$$

$$-k(a_{31}-a_{21})-ka_{31}=0$$

و من هذه نحصل على،

$$a_{11}=\frac{3}{4k}\ ,\ a_{21}=\frac{1}{2k}\ ,\ a_{31}=\frac{1}{4k}$$

الآن سلط حمل $f_2 = 1$ على الكتلة التي في الوسط بينما $f_1 = f_3 = 0$،



$$-ka_{12}-k(a_{12}-a_{22})=0$$

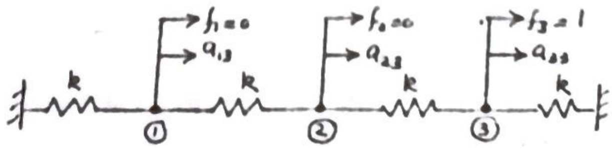
$$-k(a_{22}-a_{12})-k(a_{22}-a_{32})+1=0$$

$$-k(a_{32}-a_{22})-ka_{32}=0$$

و من هذه المعادلات نحصل علي،

$$a_{12}=\frac{1}{2k}\ ,\ a_{22}=\frac{1}{k}\ ,\ a_{32}=\frac{1}{2k}$$

الآن سلط حمل $f_3 = 1$ على الكتلة التي على اليمين بينما $f_1 = f_2 = 0$،



$$-ka_{13}-k(a_{13}-a_{23})=0$$

$$-k(a_{23}-a_{13})-k(a_{23}-a_{33})=0$$

$$-k(a_{33}-a_{23})-ka_{33}+1=0$$

و من هذه المعادلات نحصل علي،

$$a_{13}=\frac{1}{4k}\ ,\ a_{23}=\frac{1}{2k}\ ,\ a_{32}=\frac{3}{4k}$$

و بالتالي فإن مصفوفة المرونة تصبح،

$$[A]=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

4. مصفوفة الكزازة

يمكن كتابة مصفوفة الكزازة لجهاز له ثلاث درجات من الحرية هكذا

$$\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

أو باختصار،

$$\{f\} = [K]\ \{X\}$$

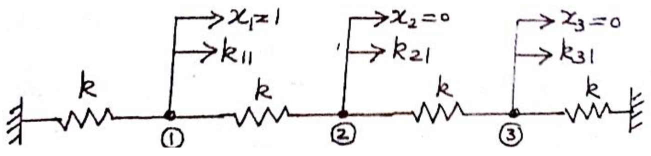
هنا أيضاً $f_i=\omega^2 m_i X_i$.

k_{ij} تعني القوة عند المحطة i الناتجة من إزاحة مقدارها واحد في المحطة j بينما إزاحة المحطات الأخرى صفراً.

مثال(6):

أكتب مصفوفة الكزازة للجهاز الموضَّح في المثال السابق.

سلط إزاحة مقدارها $x_1 = 1$ على المحطة في أقصي اليسار بينما $x_2 = x_3 = 0$



المعادلات:

$$-k - k + k_{11} = 0$$

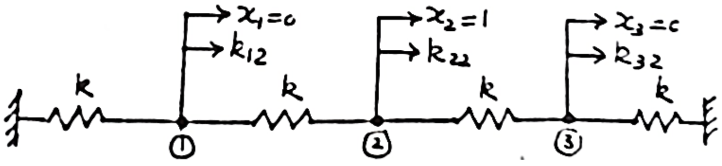
$$k + k_{21} = 0$$

$$k_{31} = 0$$

و بالتالي نحصل على،

$k_{11} = 2k$, $k_{21} = -k$, $k_{31} = 0$

و الآن سلط إزاحة مقدارها $x_2 = 1$ على المحطة الوسطي بينما $x_1 = x_3 = 0$



المعادلات:

$$k + k_{12} = 0$$

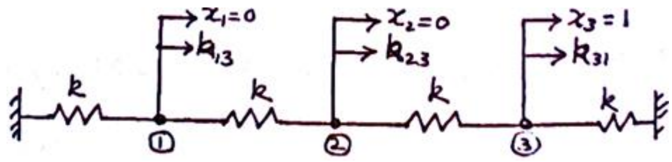
$$-k - k + k_{22} = 0$$

$$k + k_{32} = 0$$

و بالتالي نحصل على،

$k_{12} = -k$, $k_{22} = 2k$, $k_{32} = -k$

و أخيراً سلط إزاحة $x_3 = 1$ على المحطة اليمين بينما $x_1 = x_2 = 0$



المعادلات:

$$k_{13} = 0$$

$$k + k_{23} = 0$$

$$-k - k + k_{33} = 0$$

و بالتالي نحصل على،

$$k_{13} = 0,\ k_{23} = -k\ ,\ k_{33} = 2k$$

إذن مصفوفة الكزازة،

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

و الآن تحقق من الآتي،

$$[K]^{-1} = [A]$$
$$[A]^{-1} = [K]$$

إنَّ التحليل الدقيق للأجهزة ذات درجات حرية متعددة صعب، و العمليات الحسابية المصاحبة له طويلة. و في كثير من الأحيان لا تكون كل أنماط الاهتزاز مطلوبة، و قد يكفي تقديراً معقولاً للنمط الأساسي للاهتزاز و الأنماط الأخرى المنخفضة. هنالك عدد من الطرق المستخدمة لإيجاد أنماط الاهتزاز. سنركز اليوم على طريقة واحدة و هي تكرار المصفوفة.

8.5 طريقة تكرار المصفوفة:

إنَّ معادلات الحركة أياً كانت طريقة استنتاجها، فهي تأتي على أشكال متشابهة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

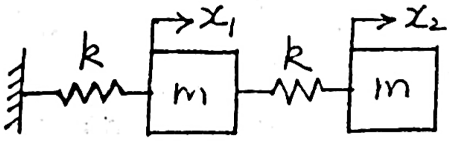
وفي حالة أنَّ تكون المصفوفة مصفوفة كزازة فإنَّ $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ وأما إن كانت مصفوفة مرونة $\lambda = \omega^2$

.

و في طريقة تكرار المصفوفة، يبدأ التكرار بافتراض عمود الازاحات على يمين المعادلة و من ثم القيام بالعملية المشار إليها و التي تؤدي إلي تقدير جديد للازاحات. هذه الازاحات الجديدة يتم قسمة عناصرها على قيمة معينة تجعل أحد هذه الإزاحات وحدة واحدة. و تقارب الحل يعطي الذبذبة الأساسية إذا كانت المسألة مبنية على المرونة، أما إذا كانت المسألة مبنية على الكزازة فإن الحل يقود إلي القيمة القصوى للذبذبة الطبيعية.

مثال(7):

أوجد الذبذبة الطبيعية الأساسية و نمط الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه بطريقة تكرار المصفوفة.

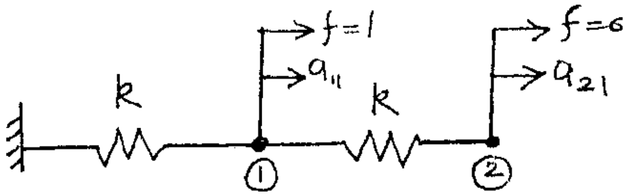


الحل:

معادلة مصفوفة المرونة للجهاز هي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

لإيجاد معامل المصفوفة a_{ij}، سلط قوة وحدة واحدة عند المحطة (1)،



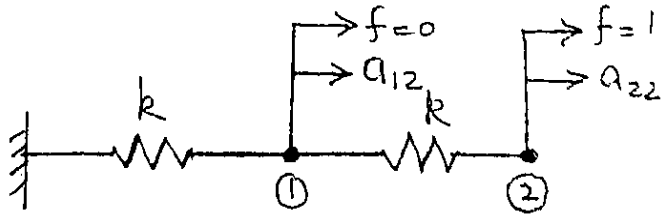
$$1-ka_{11}-k\left(a_{11}-a_{21}\right)=0 \qquad (1)$$

$$-k\left(a_{21}-a_{11}\right)=0 \qquad (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على،

$$a_{11}=\frac{1}{k}, \qquad a_{21}=\frac{1}{k}$$

و الآن سلط قوة وحدة واحدة عند المحطة (2)،



$$-ka_{12}-k\left(a_{12}-a_{22}\right)=0 \qquad (3)$$

$$1-k\left(a_{22}-a_{12}\right)=0 \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) نحصل على،

$$a_{12}=\frac{1}{k}\ , \qquad a_{22}=\frac{2}{k}$$

إذن معادلة المصفوفة هي،

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\frac{m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

نبدأ تكرار المصفوفة بالقيم $X_1 = X_2 = 1$ في الطرف اليمين للمعادلة وهي تقود إلي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\frac{m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\frac{3m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 0.67 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

في التكرار الثاني،

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.67 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \frac{2.67m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 0.63 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

في التكرار الثالث،

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.63 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \frac{2.63m\omega^2}{k}\begin{bmatrix} 0.62 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

و إذا توقفنا عند التكرار الثالث نحصل على،

$$\frac{2.63m\omega^2}{k} = 1$$

$$\therefore \omega = 0.62\sqrt{\frac{k}{m}}$$

و نمط الاهتزاز المصاحب للذبذبة الأساسية،

$$\{X\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

8.6 حساب أنماط الاهتزاز العليا:

عندما ينبني الحل على المرونة، فإنَّ العملية التكرارية تؤدي إلي النمط الأدنى. و لذلك إذا تم حذف النمط الأول، فإنَّ الحل سيؤول إلي النمط الذي يليه أي النمط الثاني.

لنفترض أنَّ الحل المقترح يمكن التعبير عنه بمجموع أنماط الاهتزاز X_i

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots$$

و للتفريق بين الحل المقترح و الأنماط X_i في المعادلة السابقة سنلجأ إلي التسمية التالية

$$X_i = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix}$$

و الآن نحذف النمط الأول بأن نجعل $C_1 = 0$ في الحل المقترح X. و لهذا نستخدم علاقة التعامد بالضرب سابقاً بـ $X^T_1\ M$ و الذي سيؤدي إلي التخلص من كل الحدود على يمين المعادلة ما عدا الحد الأول،

$$X^T_1\ M\ X = C_1\ X^T_1\ M\ X_1$$

و لأنَّ $C_1 = 0$ فإننا نجد أنَّ،

$$X^T_1\ M\ X = 0$$

أي أنَّ،

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$m_1 X_1 \overline{X}_1 + m_2 X_2 \overline{X}_2 + m_3 X_3 \overline{X}_3 = 0$$

و من هذه المعادلة نحصل على الآتي،

$$\overline{X}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)\overline{X}_2 - \frac{m_3}{m_1}\left(\frac{X_3}{X_1}\right)\overline{X}_3$$

$$\overline{X}_2 = X_2$$

$$\overline{X}_3 = X_3$$

و المعادلتان الأخيرتان تطابقيتان وقد صيغتا كذلك من أجل كتابة المعادلات الثلاث في شكل مصفوفة،

$$\{X\} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & -\frac{m_3}{m_1}\left(\frac{x_3}{x_1}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\{X\}$$

$$\{X\} = [S]\{X\}$$

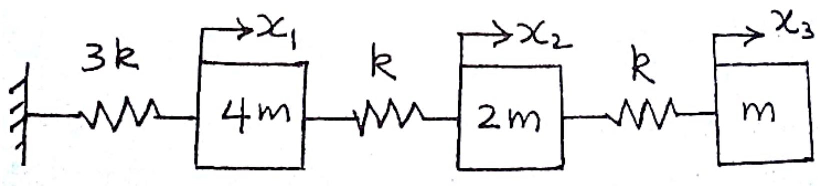
بهذه الطريقة يكون قد تم اكتساح النمط الأول، و لهذا [S] تعرف بمصفوفة الاكتساح

$$\{x\} = \lambda[A][S]\{X\}$$

العملية التكرارية للمعادلة هذه ستؤول إلي النمط الثاني. و للحصول على النمط الثالث و الأنماط العليا فإننا نجعل $C_1 = C_2 = 0$ و هكذا. و عملية الاكتساح ستنقص مرتبة المصفوفة واحداً كل مرة، إلا أنَّ عملية التقارب تصبح أكثر صعوبة.

مثال(8):

أكتب معادلة المصفوفة للجهاز الموضَّح أدناه على أساس المرونة، و من ثم أوجد كل أنماط الاهتزاز.



يمكن كتابة معادلة المصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

و إذا بدأنا العملية التكرارية بأية قيم للازاحات x_1، x_2، x_3 ، فإن المعادلة ستؤول إلي النمط الأول وهو،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \times 14.32\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.79 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

و الذبذبة الأساسية،

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{14.32m}} = 0.457\sqrt{\frac{k}{m}}$$

و لإيجاد النمط الثاني، نكون مصفوفة الاكتساح الآتية،

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{0.79}{0.25}\right) & -\frac{1}{4}\left(\frac{1.00}{0.25}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -1.58 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المعادلة التكرارية للنمط الثاني،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1.58 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4.32 & -3.0 \\ 0 & 1.67 & 0 \\ 0 & 1.67 & 3.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

نبدأ عملية التكرار بسعات عشوائية، و سيؤول الحل إلي النمط الثاني،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \times 3\begin{bmatrix} -1.0 \\ 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

إذن الذبذبة الطبيعية الثانية،

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

و لإيجاد النمط الثالث فإننا نضع،

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$\therefore C_1 = \sum_{i=1}^{3} m_i (x_i)_1 \bar{x}_i$$

$$= 4(0.25)\bar{x}_1 + 2(0.79)\bar{x}_2 + 1(1.0)\bar{x}_3 = 0$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{3} m_i (x_i)_2 \bar{x}_i$$

$$= 4(-1.0)\bar{x}_1 + 2(0)\bar{x}_2 + 1(1.0)\bar{x}_3 = 0$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على،

$$\bar{x}_1 = 0.252\bar{x}_3 \quad , \; \bar{x}_2 = -0.79\bar{x}_3$$

و التي يمكن التعبير عنها في شكل مصفوفة،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.79 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

يُلاحظ أنَّ المصفوفة خالية من النمطين الأولين، و بالتالي يمكن استخدامها كمصفوفة اكتساح للنمط الثالث. و إعمال هذه على المصفوفة الأصلية، نحصل على،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.79 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

المعادلة السابقة تؤدي مباشرة إلي النمط الثالث،

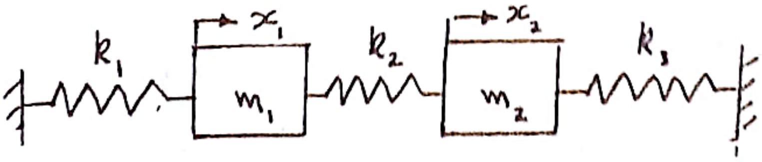
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 k}{3k} \times 1.68 \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.79 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

إذن الذبذبة الطبيعية الثالثة،

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{1.68m}} = 1.34\sqrt{\frac{k}{m}}$$

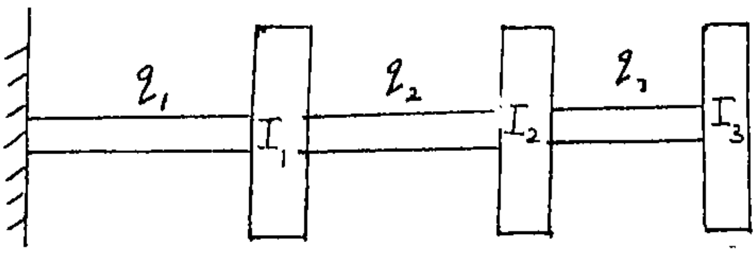
8.7 تمرين:

1. أوجد مصفوفة المرونة للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



$$\text{Ans.}\left[a_{11}=\frac{k_2+k_3}{\sum k_i k_j},\quad a_{21}=a_{12}=\frac{k_2}{\sum k_i k_j}\ ,\ a_{22}=\frac{k_1+k_2}{\sum k_i k_j}\right]$$

2. أوجد مصفوفة الكزازة للجهاز الموضَّح أدناه و هو عبارة عن ثلاثة أقراص محمولة على عمود. استنتج مصفوفة المرونة بقلب مصفوفة الكزازة.



$$Ans.[k_{11}=q_1+q_2\ ,\quad k_{12}=k_{21}=-q_2, k_{13}=k_{31}=0\ ,\quad k_{22}=q_2+q_3,$$
$$k_{23}=k_{32}=-q_3\ , k_{33}=q_3, a_{11}=\frac{1}{q_1}\ ,\ a_{12}=k_{21}=\frac{1}{q_1},$$
$$a_{13}=a_{31}=\frac{1}{q_1}\ ,\quad a_{22}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}, a_{23}=a_{32}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},\ a_{33}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}]$$

3. الأنماط العادية لجهاز له ثلاث درجات من الحرية كانت كما يلي:

للجهاز $m_1 = m_2 = m_3$ و $k_1 = k_2 = k_3$

$$X_1=\begin{bmatrix}0.737\\0.591\\0.328\end{bmatrix}, X_2=\begin{bmatrix}-0.591\\0.328\\0.737\end{bmatrix}\ , X_3=\begin{bmatrix}0.328\\-0.737\\0.591\end{bmatrix}$$

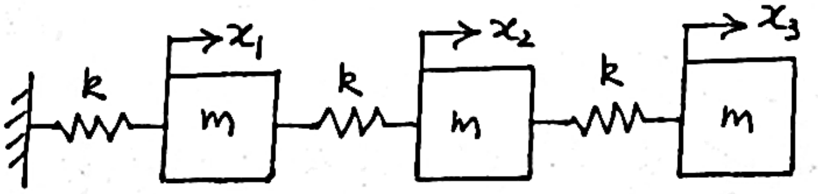
تحقق من خاصية التعامد بين هذه الأنماط.

4. إذا منح الجهاز الموصوف في المسألة (3) إزاحة أولية كما يلي ثم أطلق،

$$X=\begin{bmatrix}0.520\\-1.00\\0.205\end{bmatrix}$$

أوجد المقدار من كل نمط الموجود في الاهتزاز الحر.

5. بطريقة تكرار المصفوفة أوجد أنماط الاهتزاز للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.



$$Ans.\left[\omega_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}\,,\right.$$

$$\{x\}_1^{\ T} = [0.445 \quad , \quad 0.802 \ , \ 1.000]$$

$$\{x\}_2^{\ T} = [-1.247 \ , -0.555 \ , \ 1.000]$$

$$\left.\{x\}_3^{\ T} = [1.802 \quad , -2.247 \ , \ 1.000]\right]$$

الفصل التاسع

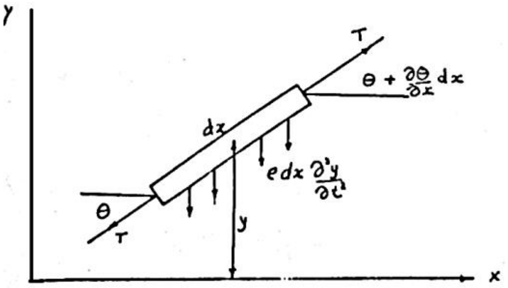
اهتزاز الأجهزة المستمرة

9.1 مدخل:

الأجهزة المستمرة هي أجهزة ذات كتلة معروفة موزعة. هذه الأجسام يفترض فيها أن تكون متجانسة و متشابهة الخواص، وتستجيب لقانون هوك إلي حد المرونة. لتحديد موضع كل ذرة فإننا نحتاج إلي عدد لا نهائي من الإحداثيات ولهذا فإن هذه الأجسام تمتلك عدد لا نهائي من درجات الحرية. عامة يكون الاهتزاز الحر لهذه الأجسام مجموع أنماط الاهتزاز الرئيسة كما تمت الإشارة لذلك من قبل. إذا كان المنحني المرن للجسم الذي بدأت به حركة الجسم ينطبق بالضبط مع واحد من الأنماط الرئيسة، فإن ذلك النمط الرئيس هو الذي يسود. و لكن المنحني المرن الذي ينتج من خبطة أو إزالة مفاجئة لأحمال نادراً ما تنطبق مع أحد الأنماط الرئيسة و لهذا تتم إثارة جميع أنماط الاهتزاز.

9.2 اهتزاز الأسلاك:

سلك مرن كتلته(kg/m) ρ تم شده بقوة T. على افتراض الانحراف العرضي صغير، فإنَّ التغيير في قوة الشد يكون صغيراً أيضاً و يمكن تجاهله. الرسم التالي يوضِّح جزء من السلك طوله dx .



إذا افترضنا أنَّ الانحراف و الميل صغيرين، فإن معادلة الحركة (في إتجاه y) تصبح،

$$T\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)-T\theta=\rho\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

حيث أنَّ، $$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

ترمز السرعة الطولية للموجات العرضية.

و لكن، $$\theta=\frac{\partial y}{\partial x}$$

فإننا نحصل على،

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

لحل هذه المعادلة نستخدم طريقة الفصل بين المتغيرات،

$$y\,(x,t) = Y(x)\,G(t)$$

و بالتعويض في المعادلة (1)،

$$\frac{c^2}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}=\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2}=-\omega^2$$

و لأن الطرف اليسار لا يعتمد على t بينما الطرف اليمين لا يعتمد على x، فبإمكاننا اعتبار كل طرف ثابت ($-\omega^2$)،

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)Y=0$$

$$\frac{d^2G}{dt^2}\ +\omega^2G=0$$

و الحل العام،

$$Y=A\sin\tfrac{\omega}{C}x+B\cos\tfrac{\omega}{C}x$$

$$G=C\sin\,\omega t+D\cos\omega t$$

الثوابت A ، B ، C و D تعتمد على الحالات الحدودية و الحالات الأولية. على سبيل المثال إذا شد السلك بين نقطتين ثابتتين المسافة بينهما L ، فإن الحالات الحدودية تكون،

$$y\,(0,t) = y\,(L,t) = 0$$

$$y\,(0,t) = 0 \qquad \therefore B = 0$$

الحل:

$$y = (C \sin \omega t + D \cos \omega t) \sin \tfrac{\omega}{C} x$$

$$y = (L,t) = 0 \qquad \therefore \sin \tfrac{\omega L}{C} = 0$$

$$\therefore \tfrac{\omega_n L}{C} = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

و شكل نمط الاهتزاز،

$$Y = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

أما إذا أزيح السلك بشكل عشوائي ثم أطلق، فإن الاهتزاز يكون وفق المعادلة التالية،

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$t = 0$$

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

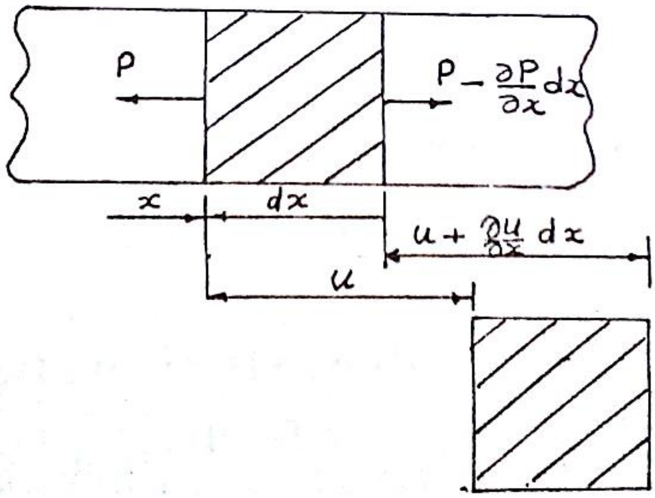
أضرب كل معادلة في $\sin \frac{k\pi x}{L}$ ثم كامل بين الحدين $x = 0$ و $x = L$. كل الحدود على اليمين ستصبح صفراً ما عدا الحد $n = k$ و هكذا نحصل على،

$$D_k = \frac{2}{L} \int_0^L y(x,0) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx$$

$$C_k = 0 \qquad k = 1,2,3,...$$

9.3 الاهتزاز الطولي للقضبان:

القضيب يفترض أن يكون منتظماً و نحيفاً. و نتيجة للقوي الطولية ستكون هنالك إزاحات طولية u على طول القضيب و ستكون بدلالة الموضع x و الزمن t. و لأنَّ القضيب له عدد لا نهائي من درجات الحرية فهنالك عدد لا نهائي من أنماط الاهتزاز.



لنأخذ عنصراً في هذا القضيب طوله dx تعرض للتشوهات الموضَّحة في الرسم أعلاه.

$$\in = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

و لكن،

$$\in = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EA}$$

حيث أنَّ A مساحة المقطع. الآن فاضل بالنسبة لـ x،

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1)$$

و الآن ناتج القوي في اتجاه العجلة يساوي حاصل ضرب الكتلة في العجلة،

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2)$$

حيث أن $\left(\rho = \frac{m}{v}\right)$

و الآن من المعادلتين (1) و (2) نحصل على،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث أن $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$،

لنفترض الحل،

$$u\ (x,t) = U\ (x)\ G\ (t)$$

و بالتالي نحصل على معادلتين تفاضليتين حلهما،

$$U(x) = A\sin\tfrac{\omega}{C}x + B\cos\tfrac{\omega}{C}x$$

$$G(t) = C\sin\ \omega t + D\cos\omega t$$

الحل العام،

$$u(x,t) = \left(A\sin\tfrac{\omega}{C}x + B\cos\tfrac{\omega}{C}x\right)\left(C\sin\ \omega t + D\cos\omega t\right)$$

$$u(x,0) = 0\,, \qquad \therefore D = 0$$

الإجهاد عند الطرفين صفراً و بالتالي الانفعال صفراً. أي أنَّ،

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = A\frac{\omega}{c}\left[C\sin\omega t\ \right] = 0$$

$$\therefore A = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} = \frac{\omega}{c}\left[-B\sin\frac{\omega L}{c}\right]\left[C\sin\omega t\ \right] = 0$$

$$B \neq 0 \qquad \therefore \sin\frac{\omega L}{c} = 0$$

$$\frac{\omega_n L}{c} = \omega_n L\sqrt{\frac{\rho}{E}} = n\pi$$

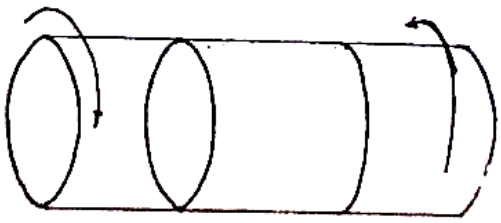
$$\therefore \omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

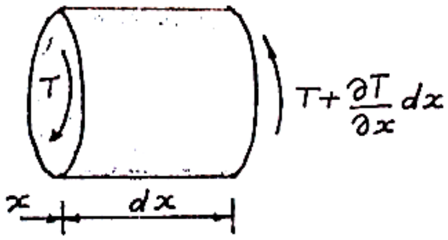
حيث أنَّ n تمثل رتبة نمط الاهتزاز، وعليه يمكن كتابة الحل السابق للقضيب الذي يكون حراً من الطرفين و ليست له إزاحة أولية هكذا،

$$u = u_o \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}t\right)$$

إذن سعة الاهتزاز الطولي على طول القضيب عبارة عن موجة على شكل cosine عدد عقدها n.

9.4 اهتزاز الالتواء في القضبان:





معادلة الحركة بالنسبة لقضيب في حالة اهتزاز التواء شبيه لمعادلة الحركة للاهتزاز الطولي في القضيب.

دع x تمثل المسافة على طول القضيب. إنَّ زاوية الالتواء في أي طول dx الناجم عن عزم T هو،

$$d\theta = \frac{T}{GJ}dx \qquad (1)$$

حيث أن GJ هي جساءة الالتواء. العزم على وجهي العنصر هو T و $T+\frac{\partial T}{\partial x}dx$ كما في الرسم أعلاه.

و الآن ناتج العزوم في اتجاه العجلة يساوي حاصل ضرب عزم القصور الذاتي في العجلة الزاوية،

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx = I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

و لأن $I=\rho J\,dx$ ، تصبح المعادلة،

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad (2)$$

من المعادلة (1)، $T = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad (3)$$

من المعادلتين (2) و (3)،

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

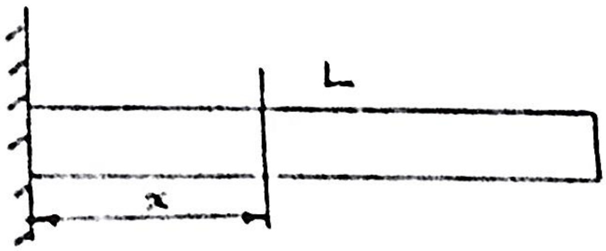
حيث أنَّ $c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

و الحل كما نعلم هو،

$$\theta(x,t) = \left[A\sin\left(\omega\sqrt{\tfrac{\rho}{G}}\,x\right) + B\cos\left(\omega\sqrt{\tfrac{\rho}{G}}\,x\right)\right]\left[C\sin\omega t + D\cos\omega t\right]$$

مثال(1):

أوجد معادلة الذبذبات الطبيعية لقضيب منتظم في حالة التواء أحد طرفيه مقيد و الآخر حر كما في الرسم أدناه.



$$\theta(x,0)=0 \qquad \therefore D=0$$

$$\theta(x,t)=\left[A\sin\left(\omega\sqrt{\tfrac{\rho}{G}}\,x\right)+B\cos\left(\omega\sqrt{\tfrac{\rho}{G}}\,x\right)\right]\sin\omega t$$

الحالات الطرفية،

$$x=0 \;\;, \qquad \theta=0 \quad \therefore B=0$$

$$x=L \;\;, \qquad T=0, \;\; ie\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=0$$

$$\therefore \cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}L\right)=0$$

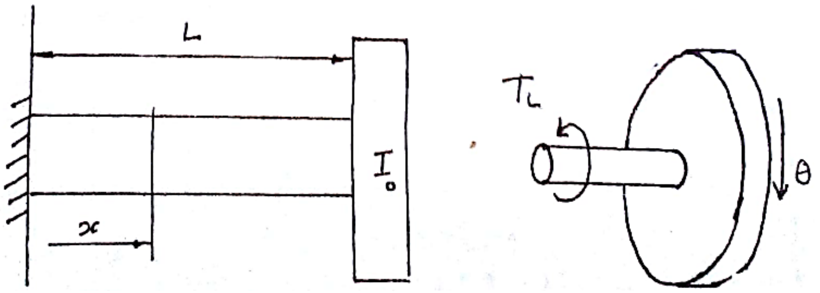
$$\omega_n\sqrt{\frac{\rho}{G}}L=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

إذن الذبذبة الطبيعية للقضيب،

$$\omega_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

مثال(2):

عمود ناقل للحركة يمكن افتراض أحد طرفيه مقيد و على الطرف الآخر قرص له عزم قصور ذاتي حول محور الدوران I_o . استنتج صيغة الذبذبات الطبيعية.



$$\theta(x,0)=0 \qquad \therefore D=0$$

$$\theta(0,t)=0 \qquad \therefore B=0$$

$$\theta(x,t)=C\sin \omega t\sin\left(\omega\sqrt{\tfrac{\rho}{G}}\,x\right)$$

من الرسم معادلة الحركة،

$$-T_L=I_o\ddot{\theta}$$

$$-GJ\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=L}=-I_o\omega^2\theta_{x=L}$$

و الآن عوِّض $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=L}$, $\theta_{x=L}$ ،

$$-GJ\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}L\right)=-I_o\omega^2\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}L\right)$$

و التي يمكن كتابتها،

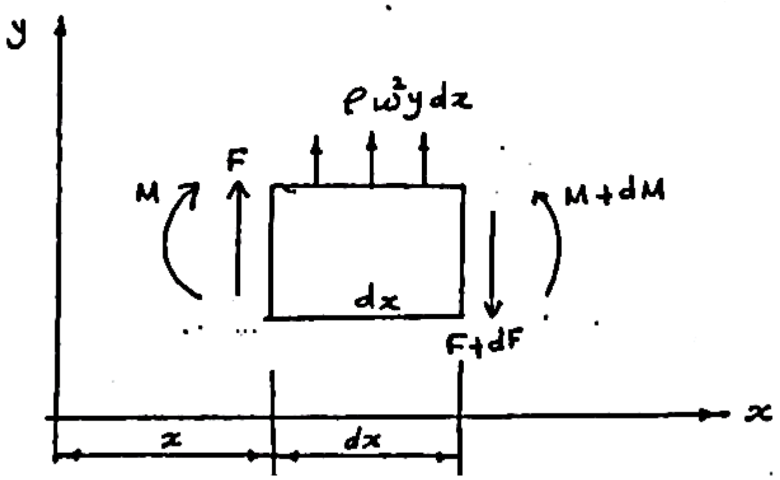
$$\tan\omega L\sqrt{\frac{\rho}{G}}=\frac{\rho J}{I_o\omega}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\therefore \beta\tan\beta=\frac{I}{I_o}$$

حيث أنَّ $I=\rho JL,\ \beta=\omega L\sqrt{\frac{\rho}{G}}$.

9.5 اهتزاز العارضات:

لإيجاد المعادلة التفاضلية للاهتزاز العرضي نأخذ القوي والعزوم المسلطة على عنصر كما في الرسم أدناه.



معادلة الحركة في اتجاه y ، ρ = الكتلة على الطول،

$$dF = \rho\omega^2 y\,dx$$

$$\frac{dF}{dx} = \rho\omega^2 y$$

العزوم حول أي نقطة في واجهة العنصر اليمين،

$$dM - Fdx + \rho\omega^2 y\frac{(dx)^2}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = F$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dF}{dx}$$

$$\therefore \frac{d^2M}{dx^2} = \rho\omega^2 y$$

$$\therefore M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \rho\omega^2 y = 0$$

إذا كان E I ثابت،

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \beta^4 y = 0$$

$$\beta^4 = \frac{\rho\omega^2}{E\,I}$$

نفترض حل المعادلة،

$$y = e^{ax}$$

سنجد أن المعادلة تتحقق بالآتي،

$$a = \pm\beta,\ \ a = \pm i\,\beta$$

و لكن،

$$e^{\pm i\beta x} = \cosh \beta x \pm \sinh \beta x$$

$$e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin\ \beta x$$

عليه يصبح الحل،

$$y = A\cosh \beta x + B\sinh \beta x\ + C\cos \beta x + D\ \sin\ \beta x$$

و الذبذبة الطبيعية،

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} = \left(\beta_n L\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

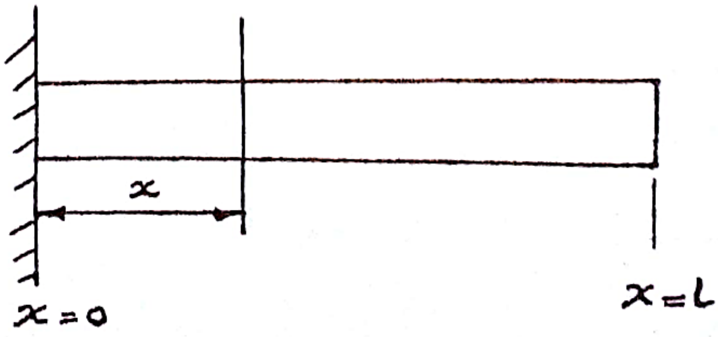
حيث أنَّ العدد β_n يعتمد على الحالات الحدودية للعارضة. الجدول التالي يعطي قيم $\left(\beta_n L\right)^2$ لبعض الحالات الطرفية،

$(\beta_3 L)^2$	$(\beta_2 L)^2$	$(\beta_1 L)^2$	الحالة الطرفية
88.9	39.5	9.87	عارضة مسنودة إسناد بسيط
61.7	22.0	3.52	عارضة وتدية
121.0	61.7	22.4	عارضة حرة الطرفين

121.0	61.7	22.4	عارضة مبنية من الطرفين
104.0	50.0	15.4	عارضة طرف مبني و آخر مسماري
50.0	15.4	0	عارضة مسمارية حرة

مثال(3):

أوجد الذبذبات الطبيعية لعارضة وتدية منتظمة.



الحالات الطرفية،

$$x=0,\quad y=\frac{dy}{dx}=0, x=L,\quad M=\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad F=\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

نعوِّض هذه الحالات في المعادلة العامة نحصل على،

$$(y)_{x=0}\quad =A+C=0\qquad \therefore A=-C$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}\quad =\beta[B+D]=0\ \therefore B=-D$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=L}\quad =A(\cosh\beta L+\cos\beta L)+B(\sinh\beta L+\sin\beta L)=0$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=L}\quad =A(\sinh\beta L-\sin\beta L)+B(\cosh\beta L+\cos\beta L)=0$$

من المعادلات السابقة نحصل على،

$$\frac{\cosh\beta L+\cos\beta L}{\sinh\beta L-\sin\beta L}=\frac{\sinh\beta L+\sin\beta L}{\cosh\beta L+\cos\beta L}$$

و التي يمكن تبسيطها،

$$\cosh \beta L \cos \beta L + 1 = 0$$

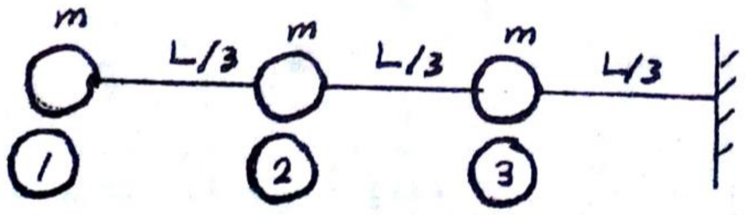
هذه المعادلة تتحقق بعدد βL كل قيمة منها تقابل نمط من أنماط الاهتزاز و للنمط الأول نجد أَن $\beta_1 L = 1.875$ و للنمط الثاني $\beta_2 L = 4.695$. و عليه فإنَّ الذبذبة الطبيعية الأولي،

$$\omega_1 = 1.875^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} = 3.515 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

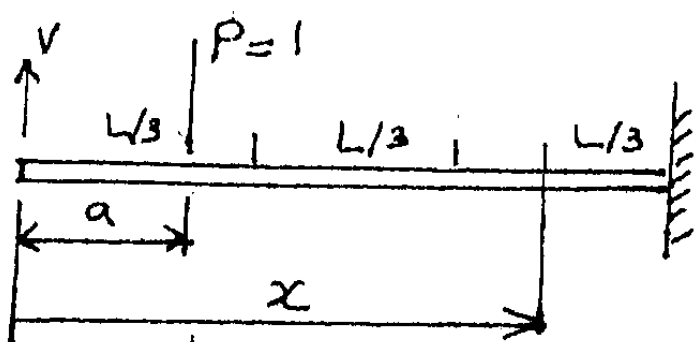
9.6 طريقة مصفوفة المرونة:

مثال(4):

أوجد الذبذبة الطبيعية لعارضة وتدية تم تمثيلها بثلاثة كتل كما في الرسم أدناه.



معامل التأثير المرن يمكن إيجاده بتسليط حمل مقداره واحد عند النقاط (1)، (2)، (3) كما في الرسم أدناه، ومن ثم حساب الانحراف عند هذه النقاط. باستخدام طريقة عزم المساحة يحسب الانحراف في أي نقطة من حاصل قسمة عزم المساحة حول تلك النقطة على جساءة الانحناء EI.



$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -P[x - a]$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{P}{2}[x-a]^2 + A$$

$$x = L, \frac{dv}{dx} = 0, \therefore A = \frac{P}{2}[L-a]^2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{P}{2}[x-a]^2 + \frac{P}{2}[L-a]^2$$

$$EIv = -\frac{P}{6}[x-a]^3 + \frac{P}{2}[L-a]^2 x + B$$

$$x = L, v = 0, \therefore B = \frac{P}{6}[L-a]^3 - \frac{P}{L}[L-a]^2$$

$$\therefore EIv = -\frac{P}{6}[x-a]^3 + \frac{P}{2}[L-a]^2 x + \frac{P}{6}[L-a]^3 - \frac{P}{L}[L-a]^2$$

$$a = 0$$

$$EIv = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{3}$$

$$x = 0\ ,\ v = -\frac{PL^3}{3EI} = a_{11}$$

$$x = \frac{L}{3},\ v = -\frac{14PL^3}{81EI} = a_{21}$$

$$x = \frac{2L}{3}, v = -\frac{4PL^3}{81EI} = a_{31}$$

$$a = \frac{L}{3}$$

$$EIv = -\frac{P}{6}\left[x - \frac{L}{3}\right]^3 + \frac{2PL^2}{9}x - \frac{14PL^3}{81}$$

$$x = 0\ ,\ v = -\frac{14PL^3}{81EI} = a_{12}$$

$$x = \frac{L}{3},\ v = -\frac{8PL^3}{81EI} = a_{22}$$

$$x = \frac{2L}{3}, v = -\frac{5PL^3}{162EI} = a_{32}$$

$$a=\frac{2L}{3}$$

$$EIv=-\frac{P}{6}\left[x-\frac{2L}{3}\right]^3+\frac{PL^2}{18}x-\frac{4PL^3}{81}$$

$$x=0\ ,\ v=-\frac{4PL^3}{81EI}=a_{13}$$

$$x=\frac{L}{3},\ \ v=-\frac{5PL^3}{162EI}\ a_{23}$$

$$x=\frac{2L}{3},\ v=-\frac{PL^3}{81EI}=a_{33}$$

مصفوفة المرونة إذن،

$$[A]=\frac{L^3}{81EI}\begin{bmatrix}27 & 14 & 4\\ 14 & 8 & 2.5\\ 4 & 2.5 & 1\end{bmatrix}$$

$$[M]=\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

$$[A][M]=\frac{mL^3}{81EI}\begin{bmatrix}27 & 14 & 4\\ 14 & 8 & 2.5\\ 4 & 2.5 & 1\end{bmatrix}$$

$$[AM-\lambda I]\{x\}=0$$

$$|AM-\lambda I|=0$$

$$\lambda=\frac{243EI}{\omega^2 mL^3},\ \ m=\rho L$$

$$\lambda_1=35\ ,\ \{x_1\}^T=[1.00\quad 0.53\quad 0.16]$$

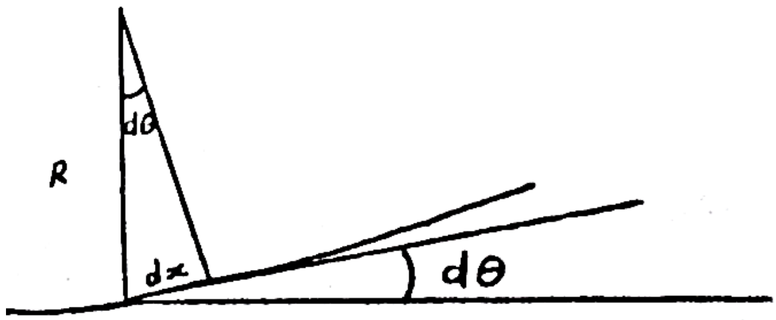
$$\omega_1=\sqrt{\frac{243EI}{35\rho L^4}}=2.63\sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

الإجابة المضبوطة $\omega_1=3.52\sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$.

إذن كلما زادت عدد الكتل كلما اقترب الحل إلي الحل المضبوط.

9.7 طريقة رالى:

لتكن M عزم الانحناء و θ ميل المنحني المرن.



طاقة الانفعال في عنصر صغير،

$$dU = \tfrac{1}{2} M \, d\theta \qquad (1)$$

و لأنَّ الانحراف عامة صغير،

$$\theta = \frac{dy}{dx} \; , \; \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

و من نظرية العارضات،

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad \therefore \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

حيث أنَّ R نصف قطر التقويسة. الآن عوضَّ في المعادلة (1)،

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} \, dx$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \, dx$$

حيث أنِّ التكامل على طول العارضة،

طاقة الحركة:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int \dot{y}\ dm$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \int y^2\ dm$$

حيث أنَّ y هو منحني الانحراف المقترح.

والآن بمساواة طاقة الحركة وطاقة الانفعال نحصل على الذبذبة الأساسية.

$$\omega^2 = \frac{\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int y^2 dm}$$

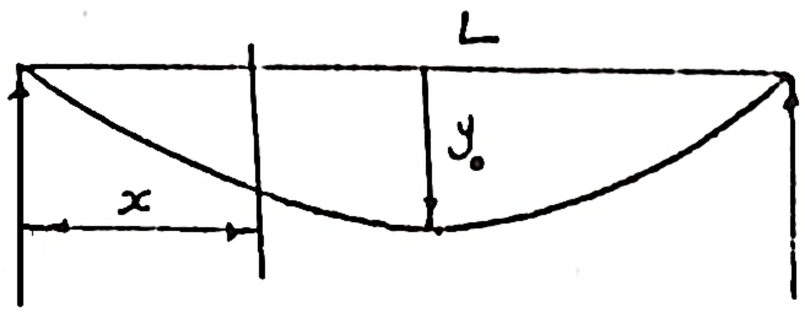
مثال(5):

أوجد الذبذبة الطبيعية الأساسية لعارضة طولها L مسنودة إسناد بسيط عند طرفيها.

نفترض أنَّ دالة منحني الانحراف.

$$y(x,t) = y_o \sin\frac{\pi x}{L}\sin \omega t$$

حيث أنَّ y_o هو الانحراف في وسط العارضة،



و الآن،

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 y_o \sin\frac{\pi x}{L}\sin\omega t$$

$$I_1 = \int_0^L EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$I_1 = EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 y_o^2 \sin\omega t \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

$$I_2 = \int_0^L y^2 dm = m\int_0^L \left(y_o \sin\frac{\pi x}{L}\right)^2 \sin^2 \omega t dx$$

$$I_2 = m y_o^2 \sin^2 \omega t \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

$$\omega^2 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}{m}$$

$$\omega = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

و هذه هي الإجابة المضبوطة.

9.8 الكتل المعزولة:

يمكن استخدام طريقة رالى لإيجاد الذبذبة الطبيعية الأساسية لعارضة أو عمود تم تمثيله بسلسة من الكتل المعزولة. كحل أولي نفترض منحني الانحراف الاستاتيكي الناجم من الأحمال $M_3 g$, $M_2 g$, $M_1 g$ وهكذا والانحرافات المقابلة لتلك الأحمال y_1 , y_2 , y_3 و هكذا. طاقة الانفعال المخزونة في العارضة تحسب من الشغل الذي تؤديه هذه الأحمال. طاقة الوضع و طاقة الحركة القصوتين هكذا،

$$U_{\max} = \frac{1}{2} g\left(M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3 + \ldots\right)$$

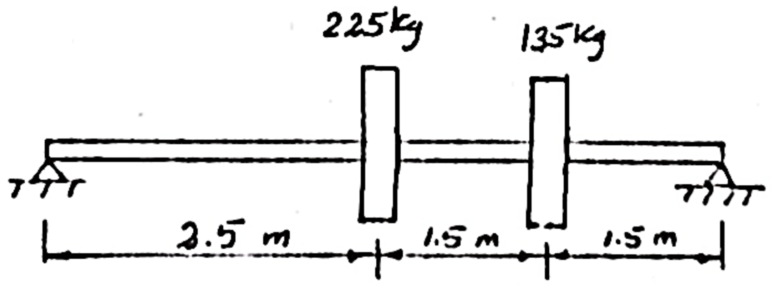
$$T_{\max} = \frac{1}{2}\omega^2\left(M_1 y^2{}_1 + M_2 y^2{}_2 + M_3 y^2{}_3 + \ldots\right)$$

و بمساواة الاثنين نحصل على،

$$\omega_1^2 = \frac{g\sum M_i y_i}{\sum M_i y^2{}_i}$$

مثال(6):

أحسب الذبذبة الطبيعية الأساسية للاهتزاز العرضي للجهاز الموضَّح في الرسم أدناه.

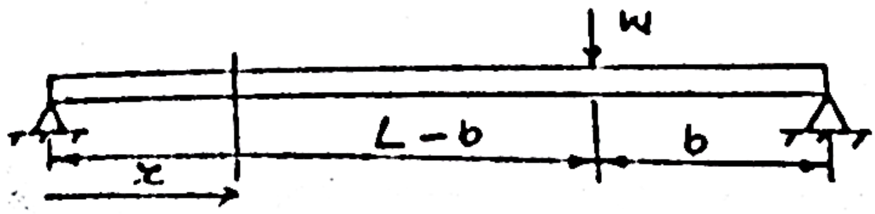


أولاً: نستخدم القاعدة التالية وهي الانحراف عند أي مقطع على بعد x من الطرف اليسار الناجم من حمل مركز على بعد b من الطرف اليمين هو،

$$y(x)=\frac{Wbx}{6EIL}\left(L^2-x^2-b^2\right)$$

$$x\le L-b$$

الانحراف تحت كل حمل يمكن أن يتم الحصول عليه بتركيب الانحرافات الناجمة من كل حمل لوحده ،



الانحراف الناجم من الحمل 135 kg،

$$y_1'=\frac{135\times9.81\times1.5\times2.5}{6\times5.5EI}\left(5.5^2-2.5^2-1.5^2\right)=\frac{3.273.10^3}{EI}$$

$$y_2'=\frac{135\times9.81\times1.5\times4}{6\times5.5EI}\left(5.5^2-4^2-1.5^2\right)=\frac{2.889.10^3}{EI}$$

الانحراف الناجم من الحمل 225 kg،

$$y_1''=\frac{225\times9.81\times2.5\times3}{6\times5.5EI}\left(5.5^2-1.5^2-2.5^2\right)=\frac{7.5243.10^3}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{225\times 9.81\times 2.5\times 1.5}{6\times 5.5EI}\left(5.5^2 - 1.5^2 - 2.5^2\right) = \frac{5.4559.10^3}{EI}$$

و الآن أجمع 'y و "y،

$$y_1 = \frac{10.797.10^3}{EI},\ y_2 = \frac{8.344.10^3}{EI}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g\sum M_i y_i}{\sum M_i {y^2}_i}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9.81(22.5\times 10.797 + 135\times 8.344)EI}{\left(22.5\times 10.797^2 + 135\times 8.344^2\right).10^3}}$$

$$\omega_1 = 0.03129EI\ \ (rad/s)$$

9.9 طريقة رالى – ريتز:

في طريقة رالى تستخدم دالة بحد واحد كافتراض لمنحني الانحراف. في طريقة رالى – ريتز تستخدم دالة كثيرة الحدود. نبدأ بالعلاقة،

$$\omega^2 = \frac{U_{max}}{T^*_{max}}$$

حيث أنَّ طاقة الحركة $T = \omega^2 T^*_{max}$ و المنحني المقترح للانحراف،

$$y(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \ldots + C_n\phi_n(x)$$

حيث أنَّ $\phi_i(x)$ دالة تحقق الحالات الحدودية و الآن،

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_j k_{ij}C_iC_j$$

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_j m_{ij}C_iC_j$$

في حالة الاهتزاز العرضي للعارضات،

$$k_{ij} = \int EI\phi_i''\,\phi_j''\,dx, \qquad m_{ij} = \int m\phi_i\ \phi_j\ dx$$

بينما لحالة القضيب الذي يهتز طولياً،

$$k_{ij} = \int EA\phi_i' \, \phi_j' \, dx, \quad m_{ij} = \int m\phi_i \, \phi_j \, dx$$

و الآن نجعل قيمة ω^2 قيمة دنيا بالتفاضل مع كل من الثابتين. فمثلاً بالنسبة لـ C_i ،

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} = \left(\frac{U_{\max}}{T^*_{\max}} \right)$$

$$= \frac{T^*_{\max} \dfrac{\partial U_{\max}}{\partial C_i} - U_{\max} \dfrac{\partial T^*_{\max}}{\partial C_i}}{{T^*_{\max}}^2} = 0$$

و هذه تحقق بالآتي،

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial C_i} - \frac{U_{\max}}{T^*_{\max}} \frac{\partial T^*_{\max}}{\partial C_i} = 0$$

و لكن نفرض أنَّ،

$$\frac{U_{\max}}{T^*_{\max}} = \omega^2$$

$$\therefore \frac{\partial U_{\max}}{\partial C_i} - \frac{\omega^2 \partial T^*_{\max}}{\partial C_i}$$

و لكن،

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial C_i} = \sum_j^n k_{ij} C_j$$

$$\frac{\partial T^*_{\max}}{\partial C_i} = \sum_j^n m_{ij} C_j$$

إذن،

$$\sum_j^n k_{ij} C_j - \omega^2 \sum_j^n m_{ij} C_j = 0$$

أي أنَّ،

$$C_1\left(k_{i1} - \omega^2 m_{i1}\right) + C_2\left(k_{i2} - \omega^2 m_{i2}\right) + \ldots + C_n\left(k_{in} - \omega^2 m_{in}\right) = 0$$

و لأنَّ i تتغير من 1 إلي n ، فهنالك n من المعادلات يمكن ترتيبها على شكل مصفوفة،

$$\begin{bmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & & & k_{nn}-\omega^2 m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = 0$$

المحددة لهذا المعادلة عبارة عن معادلات جبرية بدلالة ω^2 من الدرجة n. و حل المعادلات يقود إلي ذبذبات طبيعية عددها n. أما أشكال الاهتزاز فيمكن الحصول عليها بحل المعادلات من أجل C_i لكل ذبذبة طبيعية و تعويض ذلك في المعادلة،

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \phi_i(x)$$

مثال(7):

باستخدام طريقة رالى – ريتز، أوجد الذبذبتين الأوليتين و نمطي الاهتزاز لعارضة وتدية طولها L باستعمال حد واحد ثم حدين و هما،

$$\phi_1 = \left(\frac{x}{L}\right)^2, \ \phi_2 = \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

استعمال حد واحد،

$$\phi_1'' = \frac{2}{L^2} \ , \ \phi_2'' = \frac{6x}{L^3}$$

$$k_{11} = EI\int_0^L \phi_1''\phi_1''\,dx = EI\int_0^L \frac{4}{L^4}\,dx = \frac{4EI}{L^3}$$

$$m_{11} = m\int_0^L \phi_1\phi_1\,dx$$

$$= m\int_0^L \frac{x^4}{L^4}\,dx = \frac{mL}{5}$$

$$\left|\,[K]-\omega^2[M]\,\right| = \frac{4EI}{L^3} - \frac{\omega^2 mL}{5} = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{20EI}{mL^4}$$

و النمط هو،

$$y(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$k_{11}=\frac{4EI}{L^3}$$

استعمال حدين،

$$k_{12}=EI\int_0^L \phi_1''\phi_2''\,dx\ =EI\int_0^L \frac{12x}{L^5}\,dx=\frac{6EI}{L^3}$$

$$k_{22}=EI\int_0^L \phi_2''\phi_2''\,dx\ =EI\int_0^L \frac{36x^2}{L^6}\,dx=\frac{12EI}{L^3}$$

$$m_{11}=\frac{mL}{5}$$

$$m_{12}=m\int_0^L \phi_1\phi_1\,dx\ =m\int_0^L \frac{x^5}{L^5}\,dx=\frac{mL}{6}$$

$$m_{22}=m\int_0^L \frac{x^6}{L^6}\,dx=\frac{mL}{7}$$

$$\left(\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 12\end{bmatrix}-\frac{\omega^2 mL}{210}\begin{bmatrix}42 & 35\\ 32 & 30\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=0$$

دع $\alpha=\dfrac{\omega^2 mL^4}{210EI}$ ،

$$\begin{vmatrix}4-42\alpha & 6-35\alpha\\ 6-35\alpha & 12-30\alpha\end{vmatrix}=0$$

$$\alpha_1=0.0594 \qquad \therefore \omega_1^2=12.48\frac{EI}{mL^4}$$

$$\alpha_2=5.7691 \qquad \therefore \omega_2^2=1211.5\frac{EI}{mL^4}$$

النمط الأول يحسب من الآتي،

$$(4-42\alpha_1)C_1+(6-35\alpha_1)C_2=0$$

$$\therefore C_2 = 5.347 C_1$$

و بالتالي،

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 5.347\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

النمط الثاني يحسب من،

$$(4 - 42\alpha_2)C_1 + (6 - 35\alpha_2)C_2 = 0$$

$$\therefore C_2 = -12.347 C_1$$

و التالي،

$$y_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 12.347\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

الذبذبتين المضبوطتين هما،

$$\omega_1^2 = 12.36\frac{EI}{mL^4}, \quad \omega_2^2 = 485.5\frac{EI}{mL^4}$$

الواضح أن الذبذبة الأولي بحد واحد ليست مضبوطة و لكنها تبدو كذلك في حالة الحدين. الذبذبة الثانية غير مضبوطة و بالتالي لتحسين دقتها يستحسن استخدام مزيد من الحدود.

9.10 تمرين:

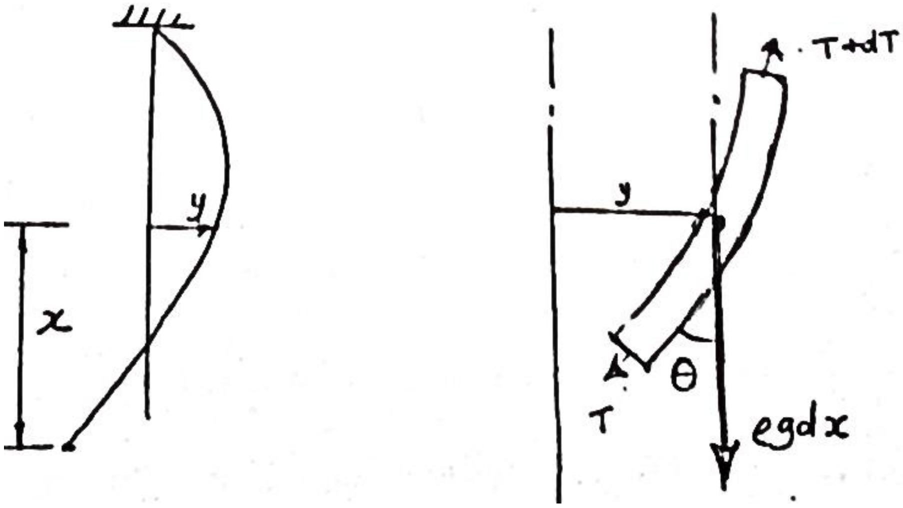
1. أوجد سرعة الموجة على طول حبل كتلته 0.372 kg/m عندما يتعرض لقوة شد 444N.

Ans. (34.5m.s)

2. أوجد سرعة الموجة الطولية على طول قضيب صلب نحيف E=200 kN/mm^2 . $\rho = 7810$ kg / m^3 Ans.(4060 m/s)

3. كيبل مرن طرفه العلوي مثبت و الأسفل حر للاهتزاز تحت تأثير الجاذبية الأرضية (أنظر الرسم). برهن أنَّ معادلة الاهتزاز العرضي:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

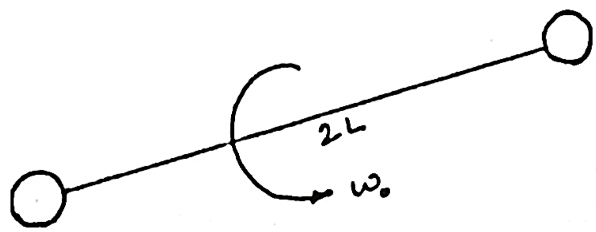


4. قمر صناعي يتكون من كتلتين متساويتين كل منهما m تتصلان بكيبل طوله 2L و كثافته ρ كما في الرسم أدناه. إذا كان القمر يدور في الفضاء بسرعة زاوية ω_o برهن أن المعادلة التفاضلية للحركة العرضية للكيبل هي: تجاهل تغير الشد في الكيبل

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{m\omega_o^2 L}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \omega_o^2 y \right)$$

و الذبذبة الأساسية،

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \left(\frac{m\omega_o^2 L}{\rho} \right) - \omega_o^2$$



5. قضيب منتظم طوله L و مساحة مقطعه A طرفه العلوي مثبت و الطرف الأسفل مسلط عليه حمل W. برهن أنَّ الذبذبات الطبيعية تكون وفق المعادلة التالية،

$$\omega L\sqrt{\frac{\rho}{E}}\ \tan\omega L\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{A\rho Lg}{W}$$

6. برهن أن الذبذبة الأساسية للجهاز الموصوف في المسألة (5) يمكن التعبير عنها هكذا

$$\omega_1 = \beta_1\sqrt{\frac{k}{rM}}$$

حيث أنَّ $k = \frac{AE}{L}$, $r = \frac{M_{rod}}{M}, \beta_1 = n_1 L$ و M الكتلة الطرفية.

إذا مثلنا الجهاز بياي ثابته k و كتلة تساوي $M + \frac{1}{3}M_{rod}$ ، أوجد المعادلة التقريبية للذبذبة الأساسية. برهن أنَّ نسبة الذبذبة التقريبية للذبذبة المضبوطة من الحل السابق هي $\frac{1}{\beta_1}\sqrt{\frac{3r}{3+r}}$.

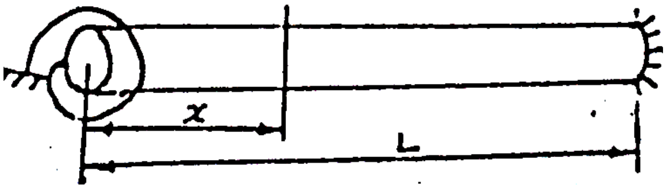
7. أوجد صيغة لذبذبات الالتواء الطبيعية لقضيب منتظم طوله L مقيد في الوسط و حر الطرفين.

$$\text{Ans.}\left[\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad , \ n = 1,2,3,\ldots\right]$$

8. أوجد الذبذبة الطبيعية لجهاز التواء يتكون من عمود منتظم له عزم قصور ذاتي I_S، و قرصان يتصلان بطرفية و لكل منهما عزم قصور ذاتي I_o. قارن الذبذبة الأساسية بتمثيل العمود بياي التواء و قرصين.

$$\text{Ans.}\left[\tan\frac{\omega L}{c} = \frac{2\left(\frac{I_o}{I_S}\frac{\omega L}{c}\right)}{\left(\frac{I_o}{I_S}\frac{\omega L}{c}\right)^2 - 1}\right]$$

9. قضيب منتظم له الخواص التالية: الطول L ، الكثافة ρ، جساءة الالتواء GJ حيث أن J العزم القطبي و G معاير القص . الطرف $x = 0$ يتصل بياي التواء له ثابت q (Nm/rad) ، بينما الطرف $x = L$ مقيد كما موضَّح في الرسم أدناه.



أوجد المعادلة التي يمكن استخلاص الذبذبات الطبيعية منها. تحقق من صحة المعادلة بدراسة الحالة $q=0$ ، $q=\infty$.

10. أوجد صيغ للذبذبات الطبيعية لقضيب حر من الطرفين في حالة اهتزاز عرضي.

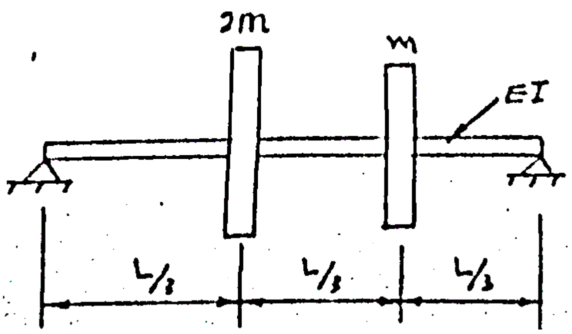
11. أوجد الذبذبات الطبيعية لعارضة منتظمة طولها L مبنية من الطرفين.

12. أوجد الذبذبات الطبيعية لعارضة منتظمة طولها L مبنية من طرف و مسمارية من الطرف الآخر.

13. اختبار لعارضة خرصانية 50mm × 50mm × 300mm مسنودة عند نقطتين تبعدان 0.224 L من الطرفين أعطي ذبذبة رنين 1690 Hz. إذا كانت كثافة الخرصانة 26000 kg/m^3، أوجد معاير المرونة على افتراض أن العارضة نحيفة.

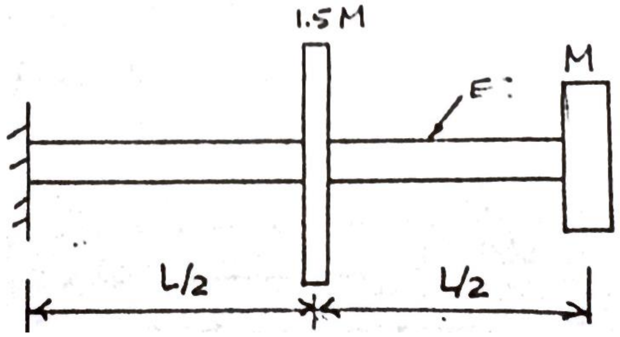
Ans.($E = 24GN/m^2$)

14. باستخدام طريقة رالي، قدِّر الذبذبة الأساسية للجهاز ذي الكتل المعزولة الموضَّح في الرسم أدناه.



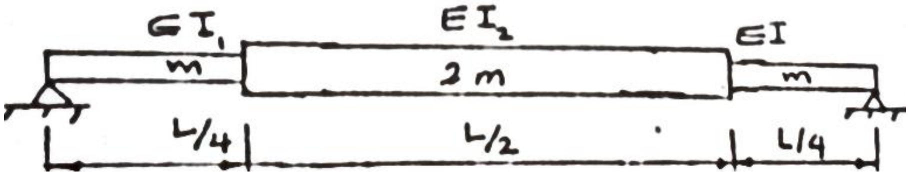
Ans. $\left(\omega_1 = 4.63\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}\right)$

15. قدر الذبذبة الأساسية للعارضة الوتدية ذات الكتل المعزولة الموضَّحة في الرسم أدناه.



Ans. $\left(\omega_1 = 1.62\sqrt{\dfrac{EI}{ML^3}}\right)$

16. استخدم دالة الانحراف $y(x) = y_{max}\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$ لإيجاد الذبذبة الأساسية للعارضة الموضَّحة في الرسم أدناه إذا كان (أ) $E\,I_2 = E\,I_1$. (ب) $E\,I_2 = 4\,E\,I_1$.



Ans. $\left(\rho = \dfrac{4m}{L},\ \ \omega = 14\sqrt{\dfrac{EI_1}{\rho L^4}}\ (\text{ب}),\quad \omega = 9.9\sqrt{\dfrac{EI_1}{\rho L^4}}\ (\text{أ})\right)$

17. أعد حل المسألة (16) و لكن استخدم المنحني $y(x) = y_{max}\dfrac{4x}{L}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$.

Ans. $\left(\rho = \dfrac{4m}{L},\ \ \omega = 17.3\sqrt{\dfrac{EI_1}{\rho L^4}}\ (\text{ب}),\quad \omega = 11\sqrt{\dfrac{EI_1}{\rho L^4}}\ (\text{أ})\right)$

18. قضيب منتظم معلق بحرية من مفصلة في القمة . باستخدام الأنماط الثلاثة التالية $\phi_1 = \dfrac{x}{L},\ \phi_2 = \sin\dfrac{\pi x}{L},\ \phi_3 = \sin\dfrac{2\pi x}{L}$ أوجد المعادلة الخاصة باستخدام طريقة رالى – ريتز .

Ans. $\left(\omega_3 = 51.5\sqrt{\dfrac{EI}{\rho L^4}}\ ,\quad \omega_2 = 15.4\sqrt{\dfrac{EI}{\rho L^4}},\ \ \omega_1 = 0\right)$

19. حمل مقداره 45kg على طرف جناح طائرة مقاتلة أدي إلي انحراف مقداره 20mm. إذا كانت الذبذبة الأساسية للجناح 10Hz، أحسب بالتقريب ذبذبة الجناح عندما يتم تركيب خزان وقود كتلته 144 kg على طرف الجناح. Ans.(1.93Hz)

20. عارضة معينة أخضعت لتجربة اهتزاز باستخدام هزاز لا تمركزي كتلته 5.44 kg في وسط العارضة، فوجد أنَّ ذبذبة الرنين 435Hz. بإضافة كتلة 4.52kg انخفضت ذبذبة الرنين إلي 398Hz. أوجد الذبذبة الطبيعية للعارضة.

Ans.(497Hz)

21. عارضة طولها L مسنودة إسناد بسيط عند طرفيها. باستخدام طريقة رالى – ريتز أوجد الذبذبتين الأوليتين . خذ $\phi_1 = \sin\frac{\pi x}{L}$, $\phi_2 = \sin\frac{2\pi x}{L}$.

Ans. $\left(\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad , \quad \omega_2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \right)$

المراجع

(References)

1. Ralph J. Harker, " Generalized Methods of Vibration Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1983.
2. W. Weaver, JR., P. Timoshenko, D.H. Young, "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, New York, 1990.
3. William T. Thomson, "Theory of Vibration with Applications" Prentice – Hall, New Jersey, 1981.

المصطلحات

(Terminologies)

Amplitude	سعة
Acceleration	عجلة
Beam	عارضة
cantilever beam	عارضة وتدية
simply supported beam	عارضة مسنودة اسناد بسيط
built – in beam	عارضة مبنية الطرفين
Coordinates	احداثيات
Coupling	ارتباط
static coupling	ارتباط استاتيكي
dynamic coupling	ارتباط ديناميكي
Continuous	مستمر
continuous - body	جسم مستمر
Damping	مضاءلة أو تخميد
viscous damping	مضاءلة لزجة
damping coefficient	معامل مضاءلة
damping ratio	نسبة مضاءلة
critical damping	مضاءلة حرجة
damper (dashpot)	مضائل (مساعد ياي)
Degrees of freedom	درجات حرية
Diagram	مخطَّط
free body diagram	مخطَّط جسم حر
force diagram	مخطَّط القوي
Displacement	إزاحة
linear displacement	إزاحة خطية
angular displacement	إزاحة زاوية
Deflection	إنحراف
static deflection	انحراف استاتيكي
Disc	قرص

Determinant	محددة
Energy	طاقة
potential energy	طاقة وضع
kinetic energy	طاقة حركة
strain energy	طاقة انفعال
Excitation	إثارة ، اضطراب
excitation force	قوة إثارة أو اضطراب
exciter	جهاز إثارة أو اضطراب
Eccentric	لا تمركزي
eccentric mass	كتلة لا تمركزية
eccentricity	لا تمركز
Equilibrium	اتزان
static equilibrium	اتزان استاتيكي
Eignvalue	قيمة ايقن
Eignvector	متجه ايقن
Frequency	ذبذبة
natural frequency	ذبذبة طبيعية
circular frequency	ذبذبة دائرية
Friction	احتكاك
Flywheel	حدَّاف
Force	قوة
out of balance force	قوة ناجمة من عدم اتزان
Geometric axis	محور هندسي
Homogeneous	متجانس
homogeneous equation	معادلة صفرية
Initial conditions	حالات أولية
Inertia	قصور ذاتي
moment of inertia	عزم قصور ذاتي
inertia force	قوة قصور ذاتي
Logarithmic decrement	تناقص لوغريثمي

Motion	حركة
ground motion	حركة أرضية
harmonic motion	حركة توافقية
periodic motion	حركة دورية
reciprocal motion	حركة ترددية
Mass	كتلة
generalized mass	كتلة عامة
Matrix	مصفوفة
Modal matrix	مصفوفة نمطية
stiffness matrix	مصفوفة كزازة
flexibility matrix	مصفوفة مرونة
mass matrix	مصفوفة كتلة
sweeping matrix	مصفوفة اكتساح
adjoint matrix	مصفوفة قرين
Node	عقدة
Oscillation	تأرجح
Overshoot	تجاوز
Orthogonal	متعامد
Particle	جسيم
Plate	لوح
Pendulum	رقّاص
Periodic time	زمن دوري
Power	قدرة
Phase angle	زاوية طور
Rigid	جاسئ (لا يتشوه)
Roll	يتدحرج
Pulley	بكرة
Radius of gyration	نصف قطر الدوران
Spring	ياي
Slip	انزلاق

Simulation	محاكاة
System	منظومة أو جهاز
conservative system	جهاز محافظ
Steady state	حالة مستقرة
Transmissibility	منقولية
Torque	عزم التواء
Uniform	منتظم
Vibration	اهتزاز
vibration isolation	عزل اهتزاز
vibration absorber	ماصة اهتزاز
free vibration	اهتزاز حر
forced vibration	اهتزاز قسري
lateral vibration	اهتزاز عرضي
longitudinal vibration	اهتزاز طولي
torsional vibration	اهتزاز التواء
vibration mode	نمط اهتزاز
Velocity	سرعة
work	شغل