التوابع العددية

التابع هو كائن رياضي يمثل علاقة بين مجموعتين تربط بكل عنصر من المجموعة الأولى عنصراً واحداً فقط من المجموعة الثانية.

تذكر المجموعة الجزئية:
1) إذا كان كل عنصر في المجموعة A أيضاً عنصراً في المجموعة B تسمى عندها المجموعة A مجموعة جزئية من B ونرمز لذلك بالرمز $A \subseteq B$، فمثلاً: المجموعة $\{1,2\}$ هي مجموعة جزئية من $\{1,2,3\}$.
2) أي مجموعة هي مجموعة جزئية من ذاتها.
فمثلاً: المجموعة $\{1,2\}$ هي مجموعة جزئية من $\{1,2\}$.

- نرمز للتابع بأحد الأحرف: $f, g, h, \ldots$.
- المجموعة الأولى هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ونسميها منطلق التابع.
- المجموعة الثانية هي غالباً $\mathbb{R}$ ونسميها مستقر التابع.
- تُكتَب الصيغة الرياضية للتابع f الذي منطلقه $D \subseteq \mathbb{R}$ ومستقره المجموعة $\mathbb{R}$ بالشكل: $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$

حيث يُقرأ التابع $f(x)$: صورة العنصر x وفق الدالة f، واختصاراً: صور x .

- لا يمكن لعنصر من مجموعة المنطلق أن يرتبط بأكثر من عنصر من المستقر.
- يمكن لعنصر من مجموعة المستقر أن يرتبط بعنصر واحد أو أكثر من مجموعة المنطلق.

قاعدة ربط التابع: هي القاعدة التي تعين صور التابع. فمثلاً: التابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$

هو تابع منطلقه مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومستقره $\mathbb{R}$ وقاعدة ربطه $f(x) = x^2$ أي أن صورة أي عنصر وفقه هي

مربع ذلك العنصر، فمثلاً: صورة العنصر 3 وفقه هي 9 ونعبر عن ذلك رياضياً كالتالي: $f(3) = 3^2 = 9$

مثال 1: ليكن لدينا التابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة $f(x) = 25x$ ،

أوجد كلاً مما يأتي: $f(1), f(-2), f(0)$

الحل:

$$f(1) = 25(1) = 25$$

$$f(-2) = 25(-2) = -50$$
$$f(0) = 25(0) = 0$$

مثال2: ليكن لدينا التابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة $f(x) = \sqrt{7}x + 1$ ،

أوجد كلاً مما يأتي: $f(\sqrt{7}), f(1), f(0)$

الحل: $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}(\sqrt{7}) = 7$

$f(1) = \sqrt{7}(1) + 1 = \sqrt{7} + 1 \quad , \quad f(0) = \sqrt{7}(0) + 1 = 1$

مثال3: ليكن لدينا التابع f المُعرّف على $D = [0, +\infty[$ وفق القاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ ، أوجد:
$f(4), f(12), f(0)$

الحل: $f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad f(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad , \quad f(0) = \sqrt{0} = 0$

مجموعة القيم المكنة للتابع: هي مجموعة جزئية من المستقر عناصرها هي صور عناصر المنطلق وفق التابع.

ولتحديد مجموعة القيم المكنة لتابع ما: يجب عليك معرفة عدة قواعد منها:

1) أي عدد حقيقي مضاف إليه عدد حقيقي آخر فسيكون الناتج حقيقياً،

فمثلاً: بفرض $x \in \mathbb{R}$ فإن $x + 3 \in \mathbb{R}$ و $x - 10 \in \mathbb{R}$

2) مربع أي مقدار حقيقي هو مقدار حقيقي موجب، فمثلاً: $-4^2 16, \ 5^2 = 25, 0^2 = 0$

ويمكن كتابة ذلك بالشكل: بفرض $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ فإنّ $x^2 \geq 0$.

مثال1: أوجد مجموعة قيم التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة $f(x) = x^2 + 1$

الحل: إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $x^2 \geq 0$ ، بإضافة العدد واحد إلى طرفي المتراجحة نحصل على $x^2 + 1 \geq 1$

وبما إن $f(x) = x^2 + 1$ تصبح المتراجحة: $f(x) \geq 1$ ، إذاً: مجموعة قيم التابع f هي $[1, +\infty[$.

مثال2: أوجد مجموعة قيم التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة $f(x) = (x+3)^2$

الحل: إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإنَّ $x + 3 \in \mathbb{R}$ (حسب القاعدة رقم 1)

ومنه $(x+3)^2 \geq 0$ (حسب القاعدة رقم 2)

ومنه $f(x) \geq 0$ أي أن مجموعة قيم التابع f هي $[0, +\infty[$.

مثال3: أوجد مجموعة قيم التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة $f(x) = x^2 + 2x + 1$

الحل: يمكن كتابة قاعدة رابط التابع على شكل مطابقة (مربع مجموع حدين) بالشكل: $f(x) = (x+1)^2$

إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإنَّ $x + 1 \in \mathbb{R}$ (حسب القاعدة رقم 1)

ومنه $(x+1)^2 \geq 0$ (حسب القاعدة رقم 2)

ومنه $f(x) \geq 0$ أي أن مجموعة قيم التابع f هي $[0, +\infty[$.