المدرسة العليا للأساتذة

الشيخ محمّد البشير الإبراهيمي ـ القبّة ـ

خطوة إلى التحليل العقدي 2

دروس وأعمال موجّهة مرفقة بحلول نموذجيّة

$$i^2 = -1!!$$

من إعداد الطالب:

وليد سعدي

الطبعة الأولى

14 أفريل 2019

تصدير

بسم الله والحمد لله أن وفقنا لهذا وما توفيقنا إلاّ بـالله، ثمّ ما أكثر فضل الناس علينا وما أعظمه، تضمحل جهود الفرد في محيطه ولو كان على جزيرة؛ لذلك أقدم شكري الخالص إلى والديّ وإخوتي وأصحابي فأساتذتي وإلى كل من أعرف.

كم هو شاق وصعب عليَّ أن أخطوَ هذه الخطوة إلى التحليل العقدي دون الخوض في الحديث عن مجموعة الأعداد العقديّة، خاصّة وأنّ هذه الأخيرة لها ثراء مبهر (فضاء طبولوجيّ (متريّ، نظيميّ)، فضاء تآلفي (شعاعيّ)، حقل تبديليّ...) لكن ثقتي في الطالب بأنّ معرفته لهذه المجموعة تجاري هذا الثراء (ثراء مجموعة الأعداد العقديّة) كما أنني أُسَلِّم بأنّ معرفة الطالب بالتحليل الحقيقيّ وكذا الجبر والطبولوجيا لا بأس بها لحاجتنا إلى هذه الركائز.

ولقد أردنا في هذه العمل أن نعطيَّ للطالب دروسًا نظريّة تُقوّي معرفته لهذا الفرع الخصب من الرياضيات وتسلِّحه بحلول نموذجيّة لتمارين الأعمال الموجّهة كتمارين تطبيقيّة لاستيعاب مفاهيم الدرس أملاً في أن يجد طالب السَّنة الرابعة رياضيات بعض الفائدة في هذا العمل. ولعلّك أيها القارئ ستلاحظ أننا لم نُغَطّي كامل فصول المقرر ولم نكثر من التمارين وكأننا تعمدنا إيقاف هذا العمل فجأة. نعم، هذه حقيقة، فقد جرى الأمر بشكل مقصود ويعود ذلك لسببين: السبب الأوّل والأهم هو أننا أردنا أن تستفيد منه بسرعة والثاني يتمثّل في كون مذكرة التخرج هي الأخرى في انتظارنا. على كلٍ جعلَنا هذا نفكر باعتبار هذه العمل كطبعة أولى ومتى وجدنا متسعًا من الوقت شرعنا في تحسينها.

وبالتفكير بأنّ هذا العمل قد تقرأه أجيال لن يسعفنا الحظ لنلقاها فإننا نريد أن نحادثك قليلاً ونجيبك عن سؤال قد يتبادر إلى ذهنك وهو لماذا ؟، لماذا نكلِّف أنفسنا عناء القيام بهكذا عمل ؟. في الحقيقة، نحن نريد من وراء ذلك أن نسد بعض النقصان الذي عانينا منه مرارًا وتكرارًا ولكوني شخصًا قليل الصبر فنحن لم نستطع الانتظار حتى نصبح أساتذة لنعينك بل قررنا أن نغربل لك ما استطعنا مما درسنا في هذه المدرسة فإن أصبنا فهذا بفضل الله وإن أخطأنا فمن أنفسنا.

وفي الأخير أوجِّه هذا الخطاب إلى أساتذتنا، نعم، أنتم يا صناع الأجيال، لا تسمحوا لأنفسكم بأن تكونوا معلِّمين تقليديين؛ فإنّ ذلك يجعل الطالب الطموح يختنق، لا تضعوا مرساةً حول عنقه بل خذوا بيده إلى التميُّز وجددوا من أساليب وطرق تدريسكم بقدر ما أمكن واختاروا أكثر الطرق جذبًا وفعاليّة، اجعلوا العلوم تبدوا بسيطة (فهي حقًّا بسيطة) ولكم علينا كلّ الفضل وخالص التقدير.

والله ولي كل توفيق

15 أفريل 2019

المراجع:

[1] عمران قوبا، التحليل، الجزأين الأوّل والرابع، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة (الشقيقة)، 2018.

[2] سلسلة تمارين الأعمال الموجّهة للأستاذة مريم بن حسين لسَّنة الدراسيّة 2019/2018.

البريد الإلكتروني:

Saadiw868@gmail.com

الإهداء

إلى

الذين غلب فضولهم حبهم للنوم، فآثروا لذّة الفهم على لذّة النوم

الفهرس

الفصل الأوّل: السلاسل العدديّة

الفصل الثاني: متتاليات وسلاسل التوابع

الفصل الثالث: السلاسل الصحيحة

الفصل الرابع: التوابع التحليليّة

الفصل الخامس: التوابع الهولومورفيّة وتعيين اللوغاريتم

الفصل السادس: الأعمال الموجّهة

1. السلاسل العدديّة

(في هذ البحث يمثل الرمز $\mathbb{k}$ حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$
أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$.)

عموميّات

تعريف

لتكن $(x_n)_n$ متتالية عدديّة. نعرِّف متتالية مجاميعها الجزئيّة $(S_n)_n$ بأنّها المتتالية العدديّة التي حدها العام معطى بالعلاقة:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

ونقول إنّ السلسلة التي حدها العام x_n (ونكتب $\sum_{n\geq 0} x_n$) متقاربة ومجموعها S إذا تقاربت المتتالية $(S_n)_n$ من S ونكتب عندئذ $S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

تكون متتالية عدديّة متقاربة إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي ومنه تكافؤ الخواص الآتية:

1) السلسلة $\sum_{n\geq 0} x_n$ متقاربة

2) المتتالية $(S_n)_n$ تحقّق شرط كوشي

3) يتحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon$$

تكمن ميزة هذا المعيار لتقارب سلسلة في أنّه يفيد في إثبات تقارب سلسلة دون معرفة مجموعها.

أمّا إذا لم تتقارب السلسلة فنقول إنّها متباعدة.

ملحوظة

ينجم عن الشرط السابق أنّ تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0} x_n$ يقتضي تقارب حدّها العام x_n من الصفر. إلاّ أنّ هذا الشرط غير كافٍ.

1.1. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} x_n$ و $\sum_{n\geq 0} y_n$ سلسلتين متقاربتين، عندئذ تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0}(x_n+\lambda y_n)$ متقاربة أيًا كان λ من $\mathbb{k}$، ويكون:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n+\lambda y_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}y_n$$

2.1. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} x_n$ و $\sum_{n\geq 0} a_n$ سلسلتين عدديتين. نفترض أنّ $|x_n|\leq a_n$ أيًا كان n من $\mathbb{N}$، (أو المتتالية $(a_n)_n$ تهيمن على المتتالية $(x_n)_n$) وأنّ $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة. عندئذ تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} x_n$ متقاربة.

السلاسل ذات الحدود الموجبة

3.1. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} x_n$ سلسلة حدودها موجبة إذن تكون $\sum_{n\geq 0} x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئيّة محدودة.

أمثلة

1- ليكن a عددًا حقيقيًّا موجبًا. تتقارب السلسلة الهندسيّة $\sum_{n\geq 0} a^n$ إذا وفقط إذا كان $0\leq a<1$ لأنّه في حالة $1\leq a$ لا تسعى متتالية الحد العام $(a^n)_n$ إلى الصفر، ومن ثمّ تكون $\sum_{n\geq 0} a^n$ متباعدة. وإذا كان $0\leq a<1$ كان:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

وتتقارب عندئذ المتتالية $(S_n)_n$ من $S=\dfrac{1}{1-a}$.

2- في حالة α من $\mathbb{R}$. نتأمّل السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$، التي نسمّيها سلسلة ريمان، تكون سلسلة ريمان متقاربة إذا وفقط إذا كان $1<\alpha$.

4.1. مبرهنة

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين حدودهما موجبة.

1) إذا كان $0 \leq u_n \leq v_n$ مهما كان $n_0 \leq n$ وكانت $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة فإنّ $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة.

وإذا كانت $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة فإنّ $\sum_{n\geq 0} v_n$ متباعدة.

2) إذا وُجد عددان موجبان تمامًا a و b يحقّقان $a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ أيًا كان $n_0 \leq n$ كان لسلسلتين $\sum_{n\geq 0} u_n$ و $\sum_{n\geq 0} v_n$ الطبيعة نفسها، أي تتقاربان معًا أو تتباعدان معًا.

3) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$ حيث ℓ من $\mathbb{R}_+^*$ كان للسلسلتين $\sum_{n\geq 0} u_n$ و $\sum_{n\geq 0} v_n$ الطبيعة نفسها.

4) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ وتقاربت السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ فإنّ $\sum_{n\geq 0} u_n$ تتقارب.

5) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ وتباعدت السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ فإنّ $\sum_{n\geq 0} u_n$ تتباعد.

5.1. مبرهنة ـ معيار كوشي ـ

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n$ سلسلة حدودها موجبة. نُعرِّف:

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n}$$

1) إذا كان $L < 1$ كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة.

2) إذا كان $L > 1$ كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متباعدة.

3) إذا كان $L = 1$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه السلسلة.

6.1. مبرهنة ـ معيار دالامبير ـ

لتكن $(a_n)_n$ متتالية حدودها موجبة تمامًا . ولنضع:

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{و} \quad \ell = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1) إذا كان $L < 1$ كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة.

2) إذا كان $\ell > 1$ كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متباعدة.

3) إذا كان $L \geq 1 \geq \ell$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه السلسلة.

7.1. مبرهنة

لتكن $(a_n)_n$ متتالية حدودها موجبة تمامًا. عندئذ:

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ملحوظة

تبيّن المبرهنة الأخيرة أنّ مجموعة السلاسل التي يمكن تحديد تقاربها أو تباعدها باستعمال معيار دالامبير محتواة (تمامًا) في مجموعة السلاسل التي يمكن تحديد تقاربها أو تباعدها اعتمادًا على معيار كوشي. نقول إنّ معيار كوشي أعلى دقة من معيار دالامبير.

نتيجة

لتكن $(a_n)_n$ متتالية حدودها موجبة تمامًا. إذا كانت النهاية $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$ وتساوي ℓ كانت النهاية $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ موجودة وتساوي ℓ أيضًا.

السلاسل المتقاربة مطلقًا والسلاسل نصف المتقاربة

تعريف

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n$ سلسلة عدديّة. نقول إنّ $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة مطلقًا إذا كانت السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ متقاربة. ونقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ نصف متقاربة إذا كانت متقاربة دون أن تكون متقاربة مطلقًا. تبيّن المبرهنة 2.1 أنّ كلّ سلسلة متقاربة مطلقًا تكون متقاربة:

$$\left(\text{متقاربة } \sum_{n\geq 0} a_n \right) \Leftarrow \left(\text{متقاربة مطلقًا } \sum_{n\geq 0} a_n \right)$$

بيد أنّ العكس غير صحيح.

السلاسل المتناوبة

تعريف

نقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متناوبة إذا وفقط إذا كان الحد العام a_n يساوي $\varepsilon(-1)^n \alpha_n$ حيث ε ينتمي إلى $\{-1,+1\}$، وحدود المتتالية $(\alpha_n)_n$ موجبة.

8.1. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n$ سلسلة متناوبة، تحقّق $a_n = (-1)^n \alpha_n$ و $(\alpha_n)_n$ متتالية حقيقيّة متناقصة ومتقاربة نحو الصفر. إذن تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n$ متقاربة. وإذا كان:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{و} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

تحقّقت، أيًا كان n من $\mathbb{N}$، المتراجحتان التاليتان:

$$|S - S_n| \leq \alpha_{n+1} \quad \text{و} \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

■

في الحقيقة يمكن استخلاص المبرهنة السابقة من مبرهنة أكثر عموميّة تنصّ على ما يلي:

9.1. مبرهنة

يكفي لتقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ تحقّق الشروط الآتية:

1) متتالية المجاميع $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ متتالية محدودة.
2) تتقارب المتتالية $(b_n)_n$ من الصفر.
3) السلسلة $\sum_{n\geq 0} |b_{n+1} - b_n|$ متقاربة.

نتيجة

إذا كانت $(b_n)_n$ متتالية حقيقيّة متناقصة ومتقاربة نحو الصفر. وكانت متتالية المجاميع $\left(A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ محدودة، عندئذ تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ متقاربة.

مثال مهم

لتكن $(\lambda_n)_n$ متتالية حقيقيّة متناقصة ومتقاربة نحو الصفر. عندئذ تكون السلسلتان:

$$\sum_{n\geq 0}\lambda_n \sin nx \quad \text{و} \quad \sum_{n\geq 0}\lambda_n \cos nx$$

متقاربتين أيًا كانت x من $]0,2\pi[$.

جداء سلسلتين

تعريف

لتكن $A=(a_n)_n$ و $B=(b_n)_n$ متتاليتين عدديتين. نعرّف المتتالية $C=(c_n)_n$ التي نسمّيها جداء تلافِّ A و B، ونرمز إليها بالرمز $A*B$ كما يلي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{i+j=n}a_i b_j$$

10.1. مبرهنة ـ مرتن ـ

لتكن $A=(a_n)_n$ و $B=(b_n)_n$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلاف $A*B$ بالرمز $C=(c_n)_n$ عندئذ يقتضي تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n$ المطلق وتقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0}b_n$، تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0}c_n$ وتتحقّق عندها المساواة:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$$

ملحوظة

إنّ تقارب إحدى السلسلتين $\sum_{n\geq 0}a_n$ أو $\sum_{n\geq 0}b_n$ مطلقًا، شرط أساسي لا يمكن حذفه من المبرهنة السابقة.

توطئة

لتكن $A=(a_n)_n$ و $B=(b_n)_n$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلاف $A*B$ بالرمز $C=(c_n)_n$. إذا كان $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ و $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$ صار لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{n+1}=a\cdot b$$

11.1. مبرهنة

لتكن $A=(a_n)_n$ و $B=(b_n)_n$ متتاليتين عدديتين. ولنرمز إلى جداء التلاف $A*B$ بالرمز $C=(c_n)_n$. إذا تقاربت السلاسل $\sum_{n\geq 0}a_n$ و $\sum_{n\geq 0}b_n$ و $\sum_{n\geq 0}c_n$ كان:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$$

2. متتاليات وسلاسل التوابع

(في هذا البحث يمثل $\mathbb{k}$ أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)

عموميّات

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. نسمّي متتالية من التوابع العدديّة التي منطلقها A كلّ تطبيق من مجموعة غير منتهية N من $\mathbb{N}$ إلى المجموعة $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ أي مجموعة التوابع التي منطلقها A وتأخذ قيمها في $\mathbb{k}$، ونرمز عادة إلى متتالية توابع بالرمز $(f_n)_n$ و f_n عنصر من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$.

التقارب البسيط لمتتالية توابع

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب ببساطة من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

ونسمّي f النهاية البسيطة لمتتالية التوابع $(f_n)_n$، ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{s}{=} f$.

التقارب المنتظم لمتتالية توابع

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$، إذا وفقط إذا تقاربت من الصفر المتتالية $(\mu_n)_n$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$، المعرّفة بالعلاقة:

$$\mu_n = \sup_{x\in A}\left| f_n(x) - f(x)\right|$$

ونسمّي f النهاية المنتظمة لمتتالية التوابع $(f_n)_n$، ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{u}{=} f$.

ملحوظتين

1. من الواضح أنّه إذا تقاربت متتالية من التوابع من تابع ما بانتظام، فهي تتقارب ببساطة من التابع نفسه.
2. لتكن متتالية التوابع $(f_n)_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نفترض أنّ $(f_n)_n$ تتقارب ببساطة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. إذا وُجدت متتالية $(\xi_n)_n$ من عناصر A بحيث لا تتقارب المتتالية التي حدها العام $|f_n(\xi_n)-f(\xi_n)|$ من الصفر، فإنّ المتتالية $(f_n)_n$ لا تتقارب بانتظام.

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصّة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ إذا وفقط إذا، تقاربت المتتالية التي حدّها العام $\mu_n=\sup_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|$ من الصفر، وذلك أيًا كانت المجموعة المتراصّة K المحتواة في A.

نلاحظ أنّ التقارب المنتظم لمتتالية توابع $(f_n)_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ من تابع f يقتضي تقاربها المنتظم على كل مجموعة متراصّة من التابع f ، وهذا بدوره يقتضي تقاربها البسيط من f . أمّا الاقتضاءان العكسيان فهما خاطئان.

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$ تحقّق شرط كوشي بانتظام إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} / \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ \ m>n\geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

1.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن المتتالية $(f_n)_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. تكون المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي بانتظام.

متتاليات التوابع والاستمرار

هناك أمثلة توضِّح أنّ التقارب البسيط لمتتالية من التوابع المستمرَّة لا يكفي حتى تكون النهاية تابعًا مستمرًّا.

2.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$، وليكن a عنصرًا من A. ولنتأمّل $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نفترض أنّ:

1) المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$.

2) التابع f_n مستمر عند a، وذلك أيًا كان n من $\mathbb{N}$.

إذن التابع f مستمرٌّ عند a.

نتيجة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع المستمرّة على A، والمتقاربة بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. عندئذ يكون التابع f مستمرًّا على A.

3.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من عناصر $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$.

نفترض أنّ:

1) المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$.

2) التابع f_n مستمر على A، وذلك أيًا كان n من $\mathbb{N}$.

إذن التابع f مستمر على A.

4.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع المستمِرَّة على A، والمتقاربة بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$، ولتكن $(\xi_n)_n$ متتالية من A متقاربة من عنصر ξ ينتمي إلى A. حينئذ يكون:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\xi_n) = f(\xi)$$

5.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{C}(A,\mathbb{k})$، أي متتالية من التوابع المستمِرَّة على A. نفترض أنّ $(f_n)_n$ تحقّق شرط كوشي بانتظام. حينئذ تتقارب $(f_n)_n$ بانتظام من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{C}(A,\mathbb{k})$.

6.2. مبرهنة ـ فيرشتراس ـ

ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{k}$ تابعًا مستمرًّا. عندئذ توجد متتالية من كثيرات الحدود $(P_n)_n$ من $\mathbb{k}[X]$ تتقارب بانتظام من التابع f على المجال $[0,1]$.

نتيجة

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{k}$ تابعًا مستمرًّا. حينئذ توجد في $\mathbb{k}[X]$ متتالية من كثيرات الحدود $(Q_n)_n$ تتقارب بانتظام من التابع f على المجال $[a,b]$.

متتاليات التوابع وقابليّة الاشتقاق

ليكن I مجالاً مفتوحًا غير خال من $\mathbb{R}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع المعرَّفة على I، وتأخذ قيمها في $\mathbb{k}$. ولنفترض أنّ f_n قابل للاشتقاق على I أيًا كان n من $\mathbb{N}$، يسمح لنا هذا بتعريف متتالية التوابع $(f_n')_n$ ويمكننا هنا أن نطرح عددًا من الأسئلة:

1) هل يقتضي التقارب البسيط، أو حتى المنتظم، للمتتالية $(f_n)_n$ تقارب $(f_n')_n$؟

2) في حال تقارب كل من المتتاليتين $(f_n)_n$ و $\left(f_n'\right)_n$، هل يكون التابع $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$ مشتق التابع $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ ؟.

في الحقيقة، هناك أمثلة تبيّن أنّ الجواب عن السؤالين السابقين هو "لا" في الحالة العامّة.

7.2. مبرهنة

ليكن I مجالاً مفتوحًا و محدودًا غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

نضع الفرضيات التالية:

1) أيًا كان n من $\mathbb{N}$، فالتابع f_n قابل للاشتقاق على I.

2) المتتالية $\left(f_n'\right)_n$ تتقارب بانتظام على I.

3) توجد x_0 من I، تتقارب عندها المتتالية العدديّة $\left(f_n(x_0)\right)_n$.

حينئذ:

1) تتقارب المتتالية $(f_n)_n$ بانتظام على I من تابع f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

2) التابع f يقبل الاشتقاق على I، ويحقّق:

$$\forall x\in I,\quad f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

نتيجة

ليكن I مجالاً مفتوحًا غير خال من $\mathbb{R}$، ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\Bbbk)$. نفترض ما يأتي:

1) أيًا كان n من $\mathbb{N}$، فالتابع f_n قابل للاشتقاق على I.

2) المتتالية $\left(f_n'\right)_n$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصَّة في I.

3) توجد x_0 من I، تجعل المتتالية العدديّة $\left(f_n(x_0)\right)_n$ متقاربة.

حينئذ:

1) تتقارب $(f_n)_n$ بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I من f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

2) التابع f يقبل الاشتقاق على I، ويحقّق:

$$\forall x\in I,\quad f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

سلاسل التوابع

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة ببساطة، أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة من A، إذا وفقط إذا تقاربت متتالية التوابع $(S_n)_n$ حيث $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$، ببساطة، أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة من A، على الترتيب. ونسمّي $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ مجموع السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ ونرمز إليه بالرمز $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

ونقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ تحقّق شرط كوشي بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت المتتالية $(S_n)_n$ شرط كوشي بانتظام، أي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ m > n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

ملحوظات

تتقارب سلسلة توابع بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي بانتظام ومن ناحية أخرى إذا تقاربت سلسلة توابع بانتظام فإنّ حدّها العام يسعى بانتظام إلى التابع المعدوم.

التقارب النظيمي لسلسلة توابع

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نظيميًّا إذا وفقط إذا، تقاربت السلسلة $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ العدديّة. إذْ عرّفنا $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$ من $\overline{\mathbb{R}}$.

8.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$.
الاستلزامات التالية صحيحة:

1) ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نظيميًّا) $\Rightarrow$ ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام)

2) ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام) $\Rightarrow$ ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة)

3) ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة) $\Rightarrow$ ($\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة ببساطة)

9.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ و $(g_n)_n$ متتاليتي توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نفترض أنّ:

1) المتتالية العدديّة $(f_n(x))_n$ متتالية حقيقيّة متناقصة، وذلك أيًا كان x من A.

2) المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام من التابع المعدوم.

3) يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عدد M، يحقّق:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right| \leq M$$

عندئذ تكون سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0} f_n g_n$ متقاربة بانتظام.

10.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نفترض أنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n مستمر عند a من A، وأنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام. عندئذ يكون مجموعها $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ مستمرًّا عند a.

11.2. مبرهنة

لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{k}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{k})$. نفترض أنّ f_n مستمرٌّ على A، أيًا كان n من $\mathbb{N}$، وأنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة في A. عندئذ يكون مجموعها $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ مستمرًّا على A.

12.2. مبرهنة

ليكن I مجالاً مفتوحًا غير خال من $\mathbb{R}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{k})$. نفترض أنّ f_n قابل للاشتقاق على I أيًا كان n من $\mathbb{N}$، وأنّه يوجد في I عنصر x_0 يجعل السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ العدديّة متقاربة، وأنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n'$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I. عندئذ تتقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I. ويكون مجموعها $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ قابلاً للاشتقاق على I، ويحقّق:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

إعداد الطالب: وليد سعدي

3. السلاسل الصحيحة

عموميّات

تعريف

نسمّي سلسلة صحيحة لمتغيّر عقدي كلّ سلسلة توابع $\sum_{n\geq 0} f_n$ حيث f_n هو تابع من الشكل:

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f_n(z) = a_n z^n$$

حيث $(a_n)_n$ متتالية من $\mathbb{C}$. ونرمز إلى السلسلة الصحيحة تجاوزًا بالرمز $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. ونسمّي a_0 الحد الثابت.

يمكننا تزويد مجموعة السلاسل الصحيحة بثلاثة قوانين (عمليّات) هي الجمع $(+)$ والضرب بعدد عقدي $(\cdot)$ والضرب $(\times)$ معرّفة كما يلي:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$
$$\lambda \cdot \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) z^n$$
$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

من السهل تيقُّن أنّ مجموعة السلاسل الصحيحة، مزوّدة بالقوانين السابقة تُكوِّن جبرًا تبديليًّا على حقل الأعداد العقديّة.

توطئة ـ آبل ـ

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، ولنفترض أنّه يوجد عدد z_0 من $\mathbb{C}^*$ بحيث تكون المتتالية العدديّة $(a_n z_0^n)_n$ محدودة، عندئذ تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة مطلقًا عند كل قيمة لـ z من $D(0,|z_0|)$ أي القرص المفتوح الذي مركزه الصفر ونصف قطره $|z_0|$.

(لننعش ذاكرتك قليلاً بتذكيرك بأنّ أنصاف أقطار الأقراص هي أعداد من $\mathbb{R}_+^*$، وأنّ أيّ قرص مفتوح (أو جزء مفتوح) يحوي عددًا لا نهائيًا من العناصر. إلاّ أنّ هذه الميزة لا تكون صحيحة في الأجزاء المغلقة إذ تشكل أُحاديات العناصر أجزاءً مغلقة في $\mathbb{C}$).

إثبات التوطئة

في الحقيقة، نجد استنادًا إلى الفرْض عددًا M من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|a_n z_0^n\right|\le M$$

إذا كانت z نقطة من القرص $D(0,|z_0|)$ فلدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|a_n z^n\right|\le M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

وهذا ما يثبت تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ مطلقًا عملاً بمعيار الحصر لأنّ الطرف الأيمن للمتراجحة حد عام لسلسلة هندسيّة متقاربة لأنّ $\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$.

نتيجة

لتكن $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ سلسلة صحيحة، ولنفترض أنّه يوجد عدد z_0 من $\mathbb{C}^*$ بحيث تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n z_0^n$ متقاربة، عندئذ تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ متقاربة مطلقًا عند كل قيمة لـ z من $D(0,|z_0|)$.

نصف قطر تقارب سلسلة صحيحة

1.3. مبرهنة وتعريف

لتكن $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ سلسلة صحيحة. عندئذ <u>يوجد</u> عنصر <u>وحيد</u> R من $\overline{\mathbb{R}}_+$، بحيث:

1) تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ متقاربة مطلقًا أيًا كان z من $\mathbb{C}$ محقّقًا للشرط $|z|<R$.

2) تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ متباعدة أيًا كان z من $\mathbb{C}$ محقّقًا للشرط $|z|>R$.

نسمّي العنصر R نصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$.

إثبات

لتكن $\mathcal{B}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة التي تجعل المتتالية العدديّة $(a_n r^n)_n$ محدودة.

لمّا كانت $\mathcal{B}$ غير خالية، (لأنّ الصفر عنصرٌ منها)، فهي تقبل حدّا أعلى:

$$R = \sup \mathcal{B} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

1) ليكن z عددًا ما من $\mathbb{C}$ بحيث $|z| < R$ عندئذ نجد، استنادًا إلى تعريف R، عددًا r من $\mathcal{B}$ بحيث $|z| < r \leq R$. ولمّا كانت المتتالية $(a_n r^n)_n$ محدودة اقتضت توطئة آبل التقارب المطلق للسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

2) ومن جهة أخرى، إذا كان z عددًا من $\mathbb{C}$ بحيث $|z| > R$. فإنّ تعريف R يبيّن أنّ المتتالية $(a_n |z|^n)_n$ ليست محدودة، وهذا يقتضي تباعد السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

تعريف

نسمّي العنصر R الوارد في المبرهنة السابقة و المعرّف بـ :

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ / \left(a_n r^n\right)_n \ \text{محدودة} \right\}$$

نصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. ومن المهم الإشارة هنا إلى أنّه يمكن تعريف R بشكل مكافئ كالآتي:

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ / \left(\sum_{n\geq 0} a_n r^n\right) \ \text{متقاربة} \right\}$$

وهذا التعريف المكافئ ينتج مباشرة من النتيجة المستخلَصة من توطئة آبل.

2.3. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، عندئذ يحقّق نصف قطر تقاربها R العلاقة التالية:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

مع الاصطلاح $\frac{1}{\infty} = 0$ و $\frac{1}{0} = \infty$.

إثبات

نلاحظ أنّ

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

وبما أنّ السلسلة تتقارب مطلقًا كلما كان $|z| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$، وتتباعد كلما كان $|z| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$. وذلك استنادًا إلى معيار كوشي فإننا نجد من وحدانية R أنّ $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$، وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة

لتكن $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، ولنفترض أنّ حدود المتتالية $(a_n)_n$ لا تنعدم ابتداءً من رتبة معيّنة n_0. وأنّ النهاية $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ موجودة وتنتمي إلى $\overline{\mathbb{R}}_+$، عندئذ ρ هو نصف قطر تقارب السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$، وذلك بناءً على معيار دالامبير للسلاسل العدديّة.

وأكثر من ذلك نتيقّن بسهولة صحة المتراجحة التالية:

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq \rho \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

فإذا رمزنا بـ :

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{و} \quad \ell = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

لاحظنا ما يلي:

1) تكون السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة مطلقًا أيًا كان z من $\mathbb{C}$ محققًا للشرط $|z| < \ell$.

2) تكون السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ متباعدة أيًا كان z من $\mathbb{C}$ محققًا للشرط $|z| > L$.

مثال

لنعتبر السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$.

لدينا:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

إذن، تتقارب السلسلة الهندسيّة $\sum_{n\geq 0} z^n$ مطلقًا من أجل كل z من $\mathbb{C}$ يحقّق $|z|<1$ وتكون متباعدة لمّا $|z|>1$.

أخيرًا، نلاحظ أنّه إذا كان $|z|=1$ كانت نهاية الحد العام:

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 1 \neq 0$$

وبالتالي تكون السلسلة $\sum_{n\geq 0} z^n$ متباعدة لأجل كل z من $\mathbb{C}$ يحقّق $|z|=1$.

تعريف

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها R موجب تمامًا. نسمّي القرص المفتوح الذي مركزه الصفر ونصف قطره R في المستوي العقدي قرص تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ونسمّي تجاوزًا الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها R دائرة تقارب السلسلة. ومن المهم الإشارة هنا إلى وجود سلاسل صحيحة تتباعد عند كل نقطة من نقاط دائرة تقاربها! (أنظر المثال السابق).

3.3. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها $\alpha>0$، ولتكن $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ سلسلة صحيحة، نصف قطر تقاربها $\beta>0$. عندئذ يحقّق:

1) نصف قطر التقارب σ للسلسلة المجموع $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ حيث $c_n = a_n + b_n$ لأجل كل n من $\mathbb{N}$ العلاقة $\sigma \geq \min(\alpha,\beta)$ وتحدث المساواة في حالة $\alpha \neq \beta$.

2) نصف قطر التقارب π للسلسلة الجداء $\sum_{n\geq 0} d_n z^n$ حيث $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ أيًا كان n من $\mathbb{N}$. العلاقة $\pi \geq \min(\alpha,\beta)$.

تعريف

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة، نسمّي السلسلة الصحيحة المعرّفة بـ $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ بسلسلتها المشتقّة.

4.3. مبرهنة
لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R. عندئذ يكون نصف قطر التقارب R' لسلسلتها الصحيحة المشتقّة مساويًا لـ R.

إثبات
نلاحظ أولاً أنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1}||z|^{n+1} \leq |z| \underbrace{|n+1||a_{n+1}||z|^n}$$

وهذه المتراجحة تبيّن أنّ الشرط $|z| < R'$ يقتضي $|z| \leq R$. ومنه $R' \leq R$.

ومن جهة أخرى، ليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ نجد:

$$\forall z \neq 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(n+1)|a_{n+1}||z|^n \leq \frac{1}{\varepsilon|z|}|a_{n+1}|\left((1+\varepsilon)|z|\right)^{n+1}$$

وذلك بناءً على المتراجحة الواضحة والمفيدة $(1+\varepsilon)^{n+1} > (n+1)\varepsilon$. وهذا يبيّن أنّ:

$$0 < (1+\varepsilon)|z| < R \Rightarrow |z| \leq R'$$

وهذا يستلزم أنّ $R \leq (1+\varepsilon)R'$ ومن ثمّ نجد أنّ $R \leq R'$ لأنّ ε عدد موجب تمامًا كيفي.

وبناءً على هذا نكون قد أثبتنا أنّ $R = R'$.

خواص مجموع سلسلة صحيحة
لقد تطرقنا في الفصل السابق لمتتاليات وسلاسل التوابع العدديّة وأنماط التقارب المختلفة. في الحقيقة، تبقى معظم التعاريف والنتائج التي درسناها هناك سارية في حالة التوابع العقديّة لمتغيّر عقدي. لذلك سنذكّر ببعضها.

تعريف
لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{C}$ ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب ببساطة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا حقّقت الشرط:

$$\forall z \in A, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$$

ونقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تقاربت نحو الصفر المتتالية $(\mu_n)_n$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$، المعرّفة بـ :

$$\mu_n = \sup_{x\in A} \left| f_n(x) - f(x) \right|$$

ونقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تحقّق شرط كوشي بانتظام، إذا وفقط إذا، كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \; m > n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

وأخيرًا نقول إنّ المتتالية $(f_n)_n$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصّة من التابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: مهما تكن المجموعة المتراصّة K المحتواة في A، فإنّ المتتالية $(f_{n|K})_n$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ تتقارب بانتظام من $f_{|K}$. لمّا كانت كل متتالية تحقّق شرط كوشي في $\mathbb{C}$ متقاربة ($\mathbb{C}$ فضاء تام) فإننا نستنتج بسهولة أنّ متتاليات التوابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ التي تحقّق شرط كوشي بانتظام تكون متقاربة بانتظام وأنّ التقارب بانتظام على كل مجموعة متراصّة لمتتالية من التوابع المستمرّة من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ يستلزم استمرار النهاية على A.

تعريف

لتكن A مجموعة جزئيّة وغير خالية من $\mathbb{C}$. ولتكن $(f_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$.

نقول إنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ تتقارب ببساطة (أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة) نحو تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تقاربت متتالية التوابع $(S_n)_n$ حيث $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ ببساطة (أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة) من التابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{C})$، الذي نسمّيه مجموع السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$.

ونقول أنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة نظيميًّا على A إذا وفقط إذا تقاربت السلسلة العدديّة $\sum_{n\geq 0} \sup_A |f_n|$.

ونعلم أنّ التقارب النظيمّي على A يستلزم التقارب المنتظم على المجموعة A.

5.3 مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0 < R$. عندئذ تتقارب سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ نظيميًّا، ومن ثمّ بانتظام على كل قرص مغلق $\overline{D}(0,r)$ مركزه الصفر ونصف قطره r من المجال $]0,R[$.

إثبات

في الحقيقة، إنّ هذه النتيجة واضحة لأنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sup_{z\in\overline{D}(0,r)} \left|a_n z^n\right| = \left|a_n\right| r^n$$

والسلسلة $\sum_{n\geq 0} \left|a_n\right| r^n$ متقاربة في حالة $R > r$.

نتيجة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0 < R$. عندئذ يكون مجموعها $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ مستمرًّا على قرص التقارب $D(0,R)$.

إثبات

هذه النتيجة واضحة من المبرهنة السابقة.

نأتي الآن إلى تعريف مهم جدًا في دراستنا اللاحقة.

تعريف

لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن f تابعًا من Ω إلى $\mathbb{C}$. نقول إنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند نقطة z_0 من Ω، إذا وفقط إذا قبل التابع التالي:

$$\Delta_{f,z_0} : \Omega \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نهاية منتهية عند z_0. ونرمز عادة إلى هذه النهاية في حال وجودها بالرمز $f'(z_0)$ ونقول عن التابع f إنّه هولومورفي على Ω إذا وفقط إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة من Ω.

سندرس التوابع الهولومورفيّة بإسهاب الفصل الخامس، لذلك سنكتفي هنا بالتعريف وسنبيّن أنّ السلاسل الصحيحة تعطي أمثلة مهمّة على توابع هولومورفيّة.

6.3. مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0<R$. عندئذ يكون التابع $z \mapsto S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ هولومورفيًّا على قرص التقارب $D(0,R)$، ويكون:

$$\forall z \in D(0,R), \quad S'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$

نتيجة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0<R$. عندئذ يقبل التابع $z \mapsto S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ الاشتقاق عددًا لا نهائيًا من المرّات على قرص التقارب $D(0,R)$، ويكون:

$$\forall z \in D(0,R), \quad S^{(p)}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}z^n$$

وبوجه خاص يكون:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p=\frac{S^{(p)}(0)}{p!}$$

نتيجة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0<R$، عندئذ تتقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}\frac{a_{n-1}}{n}z^n$ على القرص $D(0,R)$، ويكون:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n-1}}{n}z^n\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$

التابع الأسّي لمتغيّر عقدي وتطبيقاته

تعريف

لمّا كان نصف قطر التقارب للسلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ مساويًا لـ $+\infty$، عرّفنا $\exp(z)=e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ وذلك أيًا كان z من $\mathbb{C}$. وأسميناه التابع الأسّي.

تعدّ المبرهنة التالية تعميمًا للمبرهنة المتعلِّقة بالتابع الأسّي الحقيقي.

7.3. مبرهنة

1) أيًا كان z و w عددين من $\mathbb{C}$ فلدينا:

$$e^{z+w}=e^z\cdot e^w$$

2) أيًا كان z من $\mathbb{C}$ فإنّ $0\neq e^z$.

3) التابع $\exp$ هولومورفي و $\exp'=\exp$.

4) إنّ مقصور $\exp$ على $\mathbb{R}$ هو التابع الأسّي الحقيقي المألوف.

5) أيًا كان z من $\mathbb{C}$ فإنّ:

$$e^z=1\Leftrightarrow z\in 2\pi i\mathbb{Z}$$

والتابع $\exp$ يقبل العدد $2\pi i$ دورًا له (التابع الأسّي ليس متباينًا في $\mathbb{C}$!!).

6) إذا كانت $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ هي دائرة الوحدة فإنّ التطبيق:

$$\varphi:\mathbb{R}\to S^1$$
$$t\mapsto e^{it}$$

هو تماثل زمر غامر بين $(\mathbb{R},+)$ و $(S^1,\cdot)$ نواته هي المجموعة $2\pi\mathbb{Z}$.

7) وأخيرًا، إنّ صورة التابع الأسّي $\exp$ هي $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

إثبات

1) ليكن z و w عددين من $\mathbb{C}$. لمّا كانت السلسلتان $e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ و $e^w=\sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}$ متقاربتين مطلقًا فإنّ التعميم المباشر للمبرهنة المماثلة في التحليل الحقيقي على حالة السلاسل العقديّة يثبت أنّ $e^z\cdot e^w=\sum_{n\geq 0}d_n$ حيث:

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(z+w)^n}{n!}$$

وبناءً على هذا يكون لدينا $e^z\cdot e^w=e^{z+w}$.

2) لمّا كان $e^z\cdot e^{-z}=e^0=1$ استنتجنا أنّ $e^z\neq 0$ أيًا كان z من $\mathbb{C}$.

3) إنّ هذه النقطة نتيجة مباشرة لتلك الموجودة في المبرهنة المماثلة في التحليل الحقيقي.

4) تنطبق عليها نفس الملحوظة الآنفة الذكر.

5) لنلاحظ أولاً أنّ:

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad e^{it}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\cos t+i\sin t\end{aligned}$$

(وهي علاقة أولر المشهورة)

وذلك استنادًا إلى تعريف التابعين $\sin$ و $\cos$ الذي ورد معناه في التحليل الحقيقي الذي درسته ومن ثمّ فإنّ $e^{2\pi ik}=1$ مهما كان k من $\mathbb{Z}$. وبالعكس لتكن $z=x+iy$ بحيث $e^z=1$. عندئذ يكون لدينا:

$$1=\left|e^z\right|=\left|e^x e^{iy}\right|=\left|e^x\right|$$

ومن ثمّ $x=0$. وبناءً عليه يكون لدينا أيضًا:

$$\cos y+i\sin y=1$$

أي $\sin y=0$ و $\cos y=1$؛ أي y ينتمي إلى $2\pi\mathbb{Z}$. وبذا نكون قد أثبتنا التكافؤ المطلوب.

نستنتج من ذلك وضوحًا أنّ:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z+2\pi i)=\exp(z)$$

هذه النقطة مهمّة، إنّها تنفي الاعتقاد الخاطئ القائل بأنّ التابع الأسّي يبقى متباينًا في الساحة العقديّة.

6) إنّ كون التطبيق φ غامرٌ هي الخاصّة الوحيدة الواجب إثباتها. ليكن $\omega=\alpha+i\beta$ عنصر ما من S^1 عندئذ يكون $\alpha^2+\beta^2=1$ لنناقش الحالتين التاليتين.

- في حالة $0\leq\alpha$ نعرّف $t=\arcsin\beta$ عندئذ يكون $e^{it}=\omega$.
- وفي حالة $0>\alpha$ نعرّف $t=\pi-\arcsin\beta$ عندئذ يكون $e^{it}=\omega$.

ملحوظة مهمّة

e^{-iz} يكون مرافق للعدد e^{iz} إذا وفقط إذا كان z عددًا حقيقيًّا.

التوابع المثلثيّة والتوابع الزائديّة

تعريف

تسمّى التوابع التالية، المعرّفة على $\mathbb{C}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{C}$، توابع جيب التمام $\cos$، والجيب $\sin$، وجيب التمام الزائدي ch، والجيب الزائدي sh.

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$chz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$shz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ونلاحظ أنّ $ch(iz)=\cos(z)$ و $sh(iz)=i\sin(z)$، وهذا ما يبرر التشابه الكبير بين خواص هذه التوابع التي تمدِّد التوابع المثلثيّة والتوابع الزائديّة الحقيقيّة إلى الساحة العقديّة.

ويمكن التحقّق بسهولة من أنّ التوابع $\cos$ و $\sin$ دوريّة ومجموعة أدوارها هي $2\pi\mathbb{Z}$.

أي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos(z+2\pi)=\cos(z)$$
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z+2\pi)=\sin(z)$$

وأنّ التوابع ch و sh أيضًا "دوريّة" ومجموعة أدوارها هي $2\pi i\mathbb{Z}$. لأنّ $2\pi i$ دور لتابع exp أي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad ch(z+2\pi i)=ch(z)$$
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad sh(z+2\pi i)=sh(z)$$

أمّا مجموعة الأعداد العقديّة التي ينعدم عندها التابع sin فهي $\pi\mathbb{Z}$ ومجموعة الأعداد العقديّة التي ينعدم عندها التابع cos فهي $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. أي:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$$

يسمح لنا هذا بتعريف تابع الظل على المجموعة $T=\mathbb{C}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ بالعلاقة:

$$\tan : T \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}$$

وكذلك نعرّف تابع ظل التمام:

$$\operatorname{cotan} : \mathbb{C}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{\cos z}{\sin z}$$

ويمكن بأسلوب مماثل أن نلاحظ أنّ:

$$shz = 0 \Leftrightarrow z \in \pi i\mathbb{Z}$$

$$chz = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2}i+\pi i\mathbb{Z}$$

ويمكن تعريف تابعي الظل th وظل التمام coth الزائديين بشكل مشابه حيث نلاحظ العلاقة المفيدة التالية $\tan iz = i\,thz$.

4. التوابع التحليليّة

سلاسل تايلور

تعريف

لتكن المجموعة المفتوحة Ω من $\mathbb{C}$، وليكن التابع $f:\Omega\to\mathbb{C}$ نفترض أنّ f يقبل الاشتقاق عددًا لا نهائيًا من المرات عند z_0 من Ω، عندئذ نسمّي السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ سلسلة تايلور للتابع f عند z_0. (ميزة سلاسل تايلور أنّ مجموعها يطابق التوابع الموافقة لها على قرص تقاربها).

تعريف

لتكن المجموعة المفتوحة Ω من $\mathbb{C}$، وليكن التابع $f:\Omega\to\mathbb{C}$. نقول إنّ f تابع تحليلي عند النقطة z_0 من Ω، إذا وُجد عدد حقيقي $\rho(z_0)$ موجب تمامًا، ووُجدت سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(z_0)$ يحقّقان:

$$\forall z\in\Omega,\quad z\in D(z_0,\rho(z_0))\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

ونقول إنّ f تحليلي على Ω إذا وفقط إذا كان تحليليًّا عند كل نقطة z_0 من Ω.

"أي أنّ التوابع التحليليّة هي توابع تتطابق محليًّا مع مجموع سلسلة صحيحة."

1.4. مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا على Ω. عندئذ يكون f مستمرًّا وقابلاً للاشتقاق عددًا لا نهائيًا من المرّات على Ω، وأيًا كانت z_0 من Ω ، يوجد جوار محتوى في Ω للعنصر z_0، يساوي فيه التابع f مجموع سلسلة تايلور الموافقة له.

إثبات

لتكن z_0 نقطة ما من Ω، عندئذ يوجد قرص مفتوح $D(z_0,\rho(z_0))$ محتوى في Ω ونصف قطره موجب تمامًا، وتوجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(z_0)$ بحيث:

$$\forall z \in D(z_0,\rho(z_0)),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

ومن ثمّ نستنتج بناءً على النتيجتين المتعلِّقتين بمجموع السلاسل الصحيحة أنّ التابع f مستمرٌّ وقابل للاشتقاق عددًا لا نهائيًا من المرّات على $D(z_0,\rho(z_0))$، والنتيجة نفسها تُنَبِّئُنَا أنّ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ وذلك أيًا كان n من $\mathbb{N}$. إذن يطابق التابع f سلسلة تايلور الموافقة له على $D(z_0,\rho(z_0))$. وهذا يثبت المطلوب.

ملحوظة

ينتج أيضًا من النتيجة نفسها أنّه إذا كان f تحليليًّا على مجموعة مفتوحة U فإنّ مشتقّه f' تحليلي أيضًا، لأنّه إذا كان $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ داخل القرص المفتوح $D(z_0,\rho(z_0))$، كان أيضًا $f'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$ داخل القرص نفسه وبالتراجع نرى أنّ كون f تحليليٌّ على مجموعة مفتوحة U، يجعل جميع مشتقاته $\left(f^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ موجودة وتحليليّة على U.

مثال

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها $0<R$. عندئذ يكون التابع $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ تحليليًّا على قرص تقاربها $D(0,R)$. هذا يتضمّن التوابع المثلثيّة و التوابع الزائديّة وكذا التابع الأسّي.

ترميز

نرمز لمجموعة التوابع التحليليّة على جزء مفتوح Ω من $\mathbb{C}$ بالرمز $\vartheta_{\mathbb{C}}(\Omega)$ أو $\vartheta(\Omega)$ اختصارًا. ولنا أن نتيقّن بسهولة أنّه من أجل كل مجموعة مفتوحة وغير خالية Ω من $\mathbb{C}$، تشكل $\vartheta(\Omega)$ جبرًا تبديليًا على $\mathbb{C}$ بالنسبة للعمليات الثلاث التالية:

- جمع التوابع:

$$+:(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad f,g\in\vartheta(\Omega)$$

- جداء التوابع:

$$\times:(f\times g)(x)=f(x)\times g(x),\quad f,g\in\vartheta(\Omega)$$

- ضرب تابع في عدد عقدي:

$$\cdot:(\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x),\quad \lambda\in\mathbb{C},\ f\in\vartheta(\Omega)$$

أي البنية $(\vartheta(\Omega),+,\times,\cdot)$ تحقّق ما يلي:

1) $(\vartheta(\Omega),+,\times)$ حلقة تبديليّة واحديّة.

2) $(\vartheta(\Omega),+,\cdot)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{C}$.

3) $\forall\lambda\in\mathbb{C},\forall(f,g)\in(\vartheta(\Omega))^2,\quad \lambda\cdot(f\times g)=(\lambda\cdot f)\times g=f\times(\lambda\cdot g)$

مثال مهم

كثيرات الحدود بمعاملات عقديّة هي توابع تحليليّة على $\mathbb{C}$.

وبالفعل، إذا كان P كثير حدود من $\mathbb{C}[X]$ كتبنا:

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

ومن أجل كل z_0 من $\mathbb{C}$ يمكن كتابة $P(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$، وبملاحظة أنّ السلسلة $\sum_{n\geq0}\frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}z^n$ متقاربة على كامل $\mathbb{C}$، يتم الإثبات. وكحالة خاصّة تكون التوابع الثابتة $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto a_0$ تحليليّة على كامل $\mathbb{C}$.

تعريف 1

نقول عن نقطة z من $\mathbb{C}$ إنّها نقطة تراكم لجزء A من $\mathbb{C}$، إذا لاصقت $A\setminus\{z\}$.
وبعبارة أخرى، تكون z تراكميّة لـ A إذا وفقط إذا كان كل جوار لها يقطع A، على الأقل عند نقطة تختلف عن z. أي:

(z نقطة تراكم لـ A)

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall V \in \mathcal{V}(z),\quad V \cap \left(A\setminus\{z\}\right) \neq \phi\right)$$

تعريف 2

نقول عن نقطة z من A إنّها معزولة إذا وُجد جوار V لـ z لا يقطع A إلاّ في z. أي:

(z معزولة في A)

$$\Updownarrow$$

$$\left(\exists V \in \mathcal{V}(z),\quad V \cap A = \{z\}\right)$$

قضيّة

لكي تكون نقطة z من $\mathbb{C}$ تراكميّة لجزء A من $\mathbb{C}$ فإنّه يلزم ويكفي أن يقطع كل جوار لها الجزء A في عدد غير منتهٍ من النقاط.

يأتي من هذه القضيّة أنّ كل جزء منتهٍ من $\mathbb{C}$ لا يمكنه امتلاك أية نقطة تراكميّة (وكل نقاطه معزولة).

الأجزاء المترابطة في $\mathbb{C}$

تعريف

نقول عن جزء D من $\mathbb{C}$ إنّه مترابط إذا وفقط إذا كان لأجل كل نقطتين z و w من D يوجد سبيل يصل z بـ w ويقع بكامله داخل D أو، والأمر سيان نقول عن D إنّه

مترابط في $\mathbb{C}$ إذا تعذَّر إيجاد زوج من مفتوحين (مغلقين على الترتيب) غير خاليين W و S من $\mathbb{C}$ بحيث:

$$\begin{cases} D \subset W \cup S \\ D \cap W \cap S = \phi \\ D \cap W \neq \phi \\ D \cap S \neq \phi \end{cases}$$

ملحوظات

1. الجزآن الوحيدان المفتوحان والمغلقان بآن واحد في $\mathbb{C}$ هما ϕ و $\mathbb{C}$.
2. تنقسم نقاط أي جزء من $\mathbb{C}$ إلى قسمين (نقاط تراكميّة ـ نقاط معزولة).
3. كل جزء مفتوح من $\mathbb{C}$ لا يملك نقاط معزولة (جميع نقاطه تراكميّة).
4. صورة أي جزء مترابط من $\mathbb{C}$ وفق تطبيق مستمر تكون مترابطة في $\mathbb{C}$.
5. صورة أي جزء مترص من $\mathbb{C}$ (أي مغلق ومحدود) وفق تطبيق مستمر تكون مترصّة في $\mathbb{C}$.

التوطئة الأساسيّة

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f و g تابعين تحليليين على $\mathcal{D}$، و z_0 نقطة من $\mathcal{D}$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1) أيًا كان n من $\mathbb{N}$ فلدينا:

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$$

2) يوجد في $\mathcal{D}$ جوار V لنقطة z_0 يتطابق فيه التابعان f و g.

3) التابعان f و g متساويان.

إثبات

إنّ الاستلزامين $(3) \Leftarrow (2)$ و $(2) \Leftarrow (1)$ واضحان. لنثبت إذن الاستلزامين العكسيين:

$(1)\Leftarrow(2)$:

نعلم أنّه يوجد استنادًا إلى التعريف عددان موجبان تمامًا ρ_1 و ρ_2 يحقّقان $\mathcal{D}\supset D(z_0,\rho_1)$ و $\mathcal{D}\supset D(z_0,\rho_2)$ ويكون:

$$\forall z\in D(z_0,\rho_1),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$\forall z\in D(z_0,\rho_2),\quad g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

ومن ثمّ إذا عرّفنا $\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ فإنّ الخاصيّة (1) تستلزم أنّ:

$$\begin{aligned}\forall z\in D(z_0,\rho),\quad f(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\\&=g(z)\end{aligned}$$

وهذا يثبت (2).

$(2)\Leftarrow(3)$:

لنعرّف المجموعة:

$$\mathcal{A}=\{\omega\in\mathcal{D},\exists V\in\mathcal{V}(\omega)\,/\,\forall z\in V,\ f(z)=g(z)\}$$

أي أنّ $\mathcal{A}$ هي مجموعة نقاط $\mathcal{D}$ التي يتساوى في جوارٍ لكلٍ منها التابعان f و g.

إنّ المجموعة $\mathcal{A}$ غير خالية، لأنّ z_0 من $\mathcal{A}$ بمقتضى الفرْض (2).

وإذا كانت ω من $\mathcal{A}$ وجدنا قرصًا مفتوحًا $D(\omega,\rho)$ يتساوى عليه التابعان f و g، ولكن المجموعة المفتوحة $D(\omega,\rho)$ جوارٌ لكل نقطة من نقاطها إذن $\mathcal{A}\supset D(\omega,\rho)$، فالمجموعة $\mathcal{A}$ مجموعة مفتوحة. سنثبت من جهة أخرى أنّ المجموعة $\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}$ مفتوحة أيضًا.

لتكن z من $\mathcal{D}\cap\overline{\mathcal{A}}$. إذن توجد متتالية $(z_n)_n$ من عناصر $\mathcal{A}$ متقاربة نحو z.

ولمّا كان التابعان f و g تحليليين على $\mathcal{D}$ استنتجنا أنّ:

$$\begin{aligned}\forall p\in\mathbb{N},\quad f^{(p)}(z)&=\lim_{n\to+\infty}f^{(p)}(z_n)\\g^{(p)}(z)&=\lim_{n\to+\infty}g^{(p)}(z_n)\end{aligned}$$

ولكن التابعين f و g متساويان في جوار كل نقطة من $\mathcal{A}$ ومن ثمّ:

$$\forall p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(p)}(z_n)=g^{(p)}(z_n)$$

وبناءً عليه يكون:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(z) = g^{(p)}(z)$$

وهذا يقتضي تساوي التابعين f و g على قرص مفتوح متمركز في z أي أنّ z تنتمي إلى $\mathcal{A}$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{A}}$.

فإذا كان ω عنصرًا من $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ استنتجنا أنّ ω لا ينتمي إلى $\overline{\mathcal{A}}$ أي يوجد عدد حقيقي موجب تمامًا $\rho > 0$ يحقّق في آن معًا $\phi = D(\omega, \rho) \cap \mathcal{A}$ و $\mathcal{D} \supset D(\omega, \rho)$ وهذا يثبت أنّ المجموعة $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ مجموعة مفتوحة. ولمّا كانت المجموعة $\mathcal{D}$ مترابطة استنتجنا أنّ $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A} = \phi$ وهذا يثبت بدوره أنّ $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

تعريف

لتكن z_0 من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعًا تحليليًّا في جوار z_0. نقول إنّ z_0 صفر للتابع f، إذا وفقط إذا كان $f(z_0) = 0$. ونقول إنّ z_0 صفر بسيط للتابع f إذا كان $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) \neq 0$ ونقول إنّ z_0 صفر مضاعف للتابع f إذا كان z_0 صفرًا غير بسيط للتابع f ولم يكن f معدومًا في جوار z_0، وعندها تكون المجموعة:

$$K = \left\{ k \in \mathbb{N} \,/\, f^{(k)}(z_0) \neq 0 \right\}$$

غير خالية، بمقتضى التوطئة الأساسيّة، ونعرّف رتبة تضاعف الصفر z_0 للتابع f بأنّه العدد $m = \min K$.

2.4. نظريّة الأصفار المعزولة

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعًا تحليليًّا على $\mathcal{D}$، نفترض أنّ f غير معدوم على $\mathcal{D}$. عندئذ تكون أصفار التابع f معزولة؛ أي مهما يكن الصفر z_0 للتابع f في $\mathcal{D}$، يوجد في $\mathcal{D}$ جوار V للنقطة z_0 يجعل من z_0 الصفر الوحيد لـ f على هذا الجوار.

إثبات

ليكن z_0 صفرًا لتابع f، ولتكن k رتبة تضاعف الصفر z_0. عندئذ يوجد عدد حقيقي موجب تمامًا $0<\rho$ يحقّق:

$$\forall z \in D(z_0,\rho), \quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
$$=(z-z_0)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

لنعرّف أيًا كانت z من $D(z_0,\rho)$ المقدار:

$$g(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

لمّا كان التابع g مستمرًّا على $D(z_0,\rho)$ ويحقّق $g(z_0)=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$ وجدنا ρ_1 في المجال $]0,\rho[$ يكون عنده:

$$\forall z \in D(z_0,\rho_1), \quad g(z)\neq 0$$

وعندئذ يكون:

$$\forall z \in D(z_0,\rho_1)\setminus\{z_0\}, \quad f(z)=(z-z_0)^k g(z)\neq 0$$

وهذا يثبت أنّ الصفر z_0 معزول.

نتيجة

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f تابعًا تحليليًّا على $\mathcal{D}$، ولتكن $Z(f)$ مجموعة أصفار التابع f. إذا وُجد في $Z(f)$ نقطة تراكم كان التابع f معدومًا على $\mathcal{D}$.

نأتي الآن إلى أهم نظريّة في هذا الفصل؛ كونها تسمح بتمديد الكثير من الخواص المتعلّقة بالتوابع التحليليّة من جزء من المستوي العقدي إلى آخر أوسع. وبصفة خاصّة من الساحة الحقيقيّة إلى الساحة العقديّة (كما سنرى في التمرينات).

3.4. نظريّة التّمديد التحليلي

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة مترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f و g تابعين تحليليين على $\mathcal{D}$، و z_0 نقطة من $\mathcal{D}$. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1) أيًا كان n من $\mathbb{N}$ فلدينا:

$$f^{(n)}(z_0)=g^{(n)}(z_0)$$

2) توجد في $\mathcal{D}$ نقطة تراكم z_0 للمجموعة:

$$\Sigma=\{z\in\mathcal{D},\quad f(z)=g(z)\}$$

3) التابعان f و g متساويان.

إثبات

الاستلزام $(2)\Rightarrow(3)$ هو الخاصّة الوحيدة الواجب إثباتها استنادًا إلى التوطئة الأساسيّة.

$(2)\Leftarrow(3)$:

لنضع بالتعريف $h=f-g$ ولنضع:

$$\Sigma=\{z\in\mathcal{D},\quad f(z)=g(z)\}$$

لتكن z_0 نقطة تراكم لـ Σ، توجد إذن متتالية $(z_n)_n$ من $\Sigma\setminus\{z_0\}$ تتقارب نحو z_0 من $\mathcal{D}$.

بما أنّ التابع h مستمرٌّ على $\mathcal{D}$ كتابع تحليلي فإنّ:

$$h(z_0)=\lim_{n\to+\infty}h(z_n)=0$$

لأنّ $(z_n)_n$ متتالية من $\Sigma\setminus\{z_0\}$ ومنه z_0 هو صفر للتابع h وهو نقطة تراكم للمجموعة:

$$Z(h)=\{z\in\mathcal{D},\quad f(z)=g(z)\}$$

إذن، حسب نظريّة الأصفار المعزولة يكون التابع h معدومًا على $\mathcal{D}$. وهذا ينهي الإثبات.

■

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة مفتوحة ومترابطة وليكن f تابعًا تحليليًّا على $\mathcal{D}$. ولنفترض أنّ $\tilde{\mathcal{D}}$ مجموعة مفتوحة ومترابطة تحوي $\mathcal{D}$. هل يوجد تابع تحليلي $\tilde{f}:\tilde{\mathcal{D}}\to\mathbb{C}$ يتطابق مع f على المجموعة $\mathcal{D}$، أي يحقّق $\tilde{f}_{|\mathcal{D}}=f$ ؟ في الحقيقة، إذا وُجد مثل هذا التابع $\tilde{f}$ كان وحيدًا بناءً على نظريّة التّمديد التحليلي، وأسميناه تمديدًا تحليليًّا للتابع f إلى $\tilde{\mathcal{D}}$.

وتسمّى مسألة البحث عن التابع $\tilde{f}$ انطلاقًا من f مسألة التمديد التحليلي.

نتيجة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن f و g تابعين تحليليين على Ω، و z_0 نقطة من Ω. عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1) أيًا كان n من $\mathbb{N}$ فلدينا:

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$$

2) توجد في Ω نقطة تراكم z_0 للمجموعة:

$$\Sigma = \{z \in \Omega, \quad f(z) = g(z)\}$$

3) يوجد في Ω جوار V للنقطة z_0 يتطابق فيه التابعان f و g.

ملحوظة هامّة

إنّ $\mathbb{C}$ تُمَدِّد $\mathbb{R}$ جبريًّا لكنها لا تُمَدِّد $\mathbb{R}$ طبولوجيًّا.

وبالفعل، من السهل أن نلاحظ أنّ كل مفتوح غير خالٍ من $\mathbb{R}$ لا يكون مفتوحًا في $\mathbb{C}$. في حين تبقى الأجزاء المغلقة في $\mathbb{R}$ مغلقة في $\mathbb{C}$؛ هذا جعلنا نلجأ إلى تعريف التوابع التحليليّة لمتغيّر حقيقي.

التوابع التحليليّة لمتغيّر حقيقي

تعريف

ليكن I مجالا مفتوحًا غير خال من $\mathbb{R}$. وليكن التابع $f : I \to \mathbb{R}$، نقول إنّ f تابع تحليلي عند نقطة x_0 من I، إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي $\rho(x_0)$ موجب تمامًا، ووُجدت سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ معاملاتها حقيقيّة ونصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي $\rho(x_0)$ وتحقّق:

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| < \rho(x_0) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ونقول عن f أنه تحليلي على I إذا كان تحليليًّا عند كل نقطة منه.

من الواضح أنّ نظريتا الأصفار المعزولة والتمديد التحليلي تبقيان صحيحتان في حالة التوابع التحليليّة لمتغيّر حقيقي، وتبيّن المبرهنة التالية أنّه بالإمكان إرجاع مسألة دراسة التوابع التحليليّة لمتغيّر حقيقي إلى تلك المتعلّقة بالتوابع التحليليّة العقديّة.

4.4. مبرهنة

ليكن I مجالا مفتوحًا غير خال من $\mathbb{R}$، وليكن $f:I\to\mathbb{R}$ تابعًا تحليليًّا على I. حينئذ يمكن تمديد التابع f إلى تابع تحليلي على مجموعة مفتوحة مترابطة $\mathcal{D}$ في $\mathbb{C}$ تحوي I.

مثال

ليكن التابع:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}; & x\neq 0,\\ 0; & x=0.\end{cases}$$

نعلم أنّ f ينتمي إلى الصف $\mathcal{C}^{\infty}$ على $\mathbb{R}$ ويحقّق $f^{(p)}(0)=0$ أيًا كان p من $\mathbb{N}$، فلو كان f تحليليًّا على مجال مفتوح يحوي 0، لأمكن تمديده إلى تابع تحليلي f معرّف على مجموعة مفتوحة ومترابطة $\mathcal{D}$ من $\mathbb{C}$ تحوي 0، وعندها يكون $\forall p\in\mathbb{N},\quad f^{(p)}(0)=0$ ولكن هذا يستلزم أنّ التابع f معدوم $\mathcal{D}$، وهذا تناقض لأنّ:

$$\forall x\in\mathcal{D}\cap\mathbb{R}^*,\quad f(x)=e^{-1/x^2}\neq 0$$

نستنتج إذن أنّ التابع f ليس تحليليًّا على أي مجال مفتوح يحوي 0.

5. التوابع الهولومورفيّة وتعيين اللوغاريتم

التوابع الهولومورفيّة

تعريف

لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن f تابعًا من Ω إلى $\mathbb{C}$. نقول إنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند نقطة z_0 من Ω، إذا وفقط إذا قبل التابع التالي:

$$\Delta_{f,z_0} : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

نهاية منتهية عند z_0. ونرمز عادة إلى هذه النهاية بالرمز $f'(z_0)$ في حال وجودها.

ونقول إنّ التابع f هولومورفي على Ω إذا وفقط إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة من Ω.

لاحظ أنّه إذا قبل f الاشتقاق عند نقطة كان مستمرًّا عندها. نرمز لمجموعة التوابع الهولومورفيّة على مفتوح Ω بالرمز $H(\Omega)$.

1.5. مبرهنة

1) لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن z_0 من U. وأخيرًا ليكن f و g تابعين عقديين معرّفين على U وقابلين للاشتقاق عند z_0. عندئذ يكون التابعان $f+\lambda g$ (حيث λ عدد من $\mathbb{C}$) و fg قابلين للاشتقاق عند z_0، وإذا كان $g(z_0)\neq 0$ كان التابع $\frac{f}{g}$، المعرّف في جوار z_0، قابلاً للاشتقاق عند z_0. وحينئذ يكون:

$$(f+\lambda g)'(z_0) = f'(z_0)+\lambda g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

2) لتكن U و V مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا قابلاً للاشتقاق عند z_0 من U ويحقّق $f(U)\subset V$، وليكن كذلك

$g:V\to\mathbb{C}$ تابعًا قابلاً للاشتقاق عند $f(z_0)$. عندئذ يكون $g\circ f$ قابلاً للاشتقاق عند z_0 ويكون:

$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\,f'(z_0)$$

إنّ الإثبات بسيط انطلاقًا من التعريف، ويشابه إثبات المبرهنة المماثلة المتعلّقة بالتوابع لمتغيّر حقيقي لذلك نترك التفاصيل تمرينًا للقارئ

لقد رأينا عند دراسة السلاسل الصحيحة أنّ مجموع سلسلة صحيحة هولومورفي على قرص تقاربها، وكذلك يكون هولومورفيًّا كل تابع تحليلي على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ لأنّه يتطابق محليًّا مع مجموع سلسلة صحيحة.

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا عقديًّا. نطابق بين المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^2$ (وهذا ممكن لوجود تقابل بين المجموعتين). عندئذ يُكتب كل عدد عقدي z من U بالشكل $z=x+iy$ و (x,y) عنصر من $\mathbb{R}^2$. ومن ثمّ يمكننا النظر إلى التابع f على أنّه تابع لمتغيّرين يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^2$. في حالة $z=x+iy$ من U، نعرّف $P(x,y)$ بأنّه الجزء الحقيقي للمقدار $f(z)$ و $Q(x,y)$ بأنّه الجزء التخيلي للمقدار نفسه، أي:

$$(x+iy)\in U,\quad f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

2.5. مبرهنة

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن العنصر $z_0=x_0+iy_0$ من U و $f=P+iQ$ تابعًا عقديًّا معرّفًا على U. عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1) التابع f قابل للاشتقاق عند z_0.

2) التابع f ، بصفته تابعًا لمتغيرين قابل للمفاضلة عند (x_0,y_0)، وتتحقّق المساواتان:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

(شرطا كوشي ـ ريمان)

ويعطى عندئذ مشتق التابع f عند z_0 بالعلاقة:

$$f'(z_0)=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

تفيدنا هذه المبرهنة، التي توضّح العلاقة بين التوابع العقديّة لمتغيّر عقدي والتوابع الحقيقيّة لمتغيّرين، في استنتاج العديد من خواص التوابع الهولومورفيّة انطلاقًا من خواص التوابع لعدّة متغيّرات التي سبق أن درستها في الحساب التفاضلي.

لنذكر على سبيل المثال النتيجة المهمّة التالية:

3.5. مبرهنة

لتكن U مجموعة مفتوحة مترابطة وغير خالية من المستوي العقدي $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا على U، يحقّق:

$$\forall z\in U,\quad f'(z)=0$$

عندئذ يكون التابع f تابعًا ثابتًا على U.

مفهوم اللوغاريتم العقدي

لقد وجدنا في دراستنا السابقة، أنّ التطبيق:

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*,\quad z\mapsto e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

يعرّف تماثلاً زمريًّا غامرًا بين الزمرة $(\mathbb{C},+)$ والزمرة الضربيّة $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ نواته $2\pi i\mathbb{Z}$.

كما يعرّف التطبيق:

$$\varphi:\mathbb{R}\to S^1,\quad \theta\mapsto e^{i\theta}$$

مع $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ تماثلاً زمريًّا غامرًا بين الزمرة $(\mathbb{R},+)$ والزمرة $(S^1,\cdot)$ نواته هي $2\pi\mathbb{Z}$.

إذا كان z عنصرًا من $\mathbb{C}^*$، عرّفنا عمدة z أو زاوية z بأنّها المجموعة:

$$\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}:e^{i\theta}=\frac{z}{|z|}\right\}$$

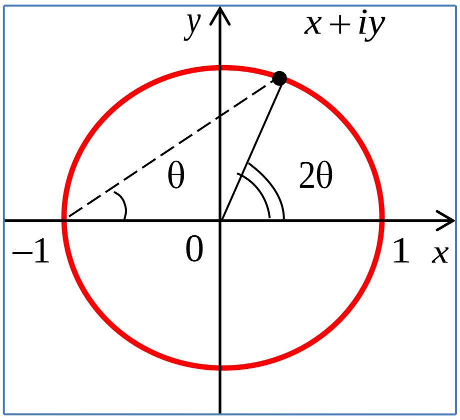
ونلاحظ أنّ:

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad \arg(z)\neq\phi$$

وإذا كان θ_0 عنصرًا من $\arg(z)$ كان $\arg(z)=\theta_0+2\pi\mathbb{Z}$.

إذا كان z عنصرًا من $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$، أسمينا التعيين الرئيسي لزاوية z العنصر الوحيد في المجموعة $\arg(z)\cap]-\pi,+\pi[$ ورمزنا إليه بالرمز $Arg(z)$ ونتحقّق بسهولة صحة المساواة التالية:

$$Arg(z)=2\arctan\frac{y}{1+x}$$



في حالة $z=x+iy$ من $S^1\setminus\{-1\}$.

وأخيرًا نذكّر بأنّ التابع الأسّي تابع تحليلي في $\mathbb{C}$، وأنّ $\exp^{(n)}=\exp$.

تعريف

ليكن z عددًا من $\mathbb{C}^*$. نسمّي لوغاريتم العدد العقدي في $\mathbb{C}$ المجموعة:

$$\log(z)=\{\omega\in\mathbb{C}:e^{\omega}=z\}$$

ليكن $\omega=x+iy$ حيث (x,y) من $\mathbb{R}^2$. وليكن z عددًا من $\mathbb{C}^*$ حينئذ يكون:

$$e^{\omega} = z \Leftrightarrow e^x e^{iy} = z = |z|\frac{z}{|z|}$$

ولمّا كان $0 < e^x$ و e^{iy} عنصرًا من S^1 استنتجنا أنّ:

$$\omega \in \log(z) \Leftrightarrow (e^x = |z|) \wedge (y \in \arg(z))$$

أو، لأنّ التابع

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$$

تقابلٌ،

$$\omega \in \log(z) \Leftrightarrow (x = \ln|z|) \wedge (y \in \arg(z))$$

نستنتج من ذلك الخاصيّة التالية:

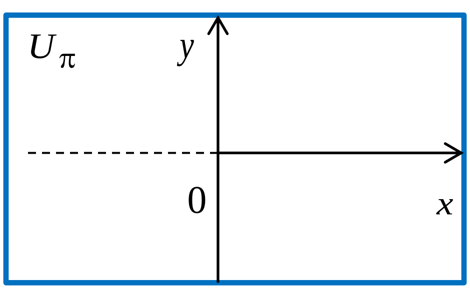
4.5. مبرهنة

ليكن z عددًا من $\mathbb{C}^*$. إنّ المجموعة $\log(z)$ غير خالية، وهي تساوي:

$$\{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg(z)\}$$

أي، مهما تكن θ_0 من $\arg(z)$، يكن $\log(z) = \ln|z| + i\theta_0 + 2\pi i\mathbb{Z}$.

لمّا كان التعيين الرئيسي لزاوية عدد عقدي غير معرّف إلاّ على المجموعة $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$، ولمّا كانت هذه المجموعة ستؤدي دورًا مهمًّا في دراستنا اللاحقة فإننا سنرمز إليها بالرمز U_π.



ومن الواضح أنّ:

$$U_\pi = \{z \in \mathbb{C}^* : \pi \notin \arg(z)\}$$
$$= \left\{z \in \mathbb{C}^* : \frac{z}{|z|} \neq -1\right\}$$

وحين تكون z عنصرًا من U_π لدينا $\ln|z| + iArg(z)$ عنصر من $\log(z)$، ومنه التعريف الآتي:

تابع اللوغاريتم الرئيسي

تعريف

لتكن z من $U_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. نسمّي اللوغاريتم الرئيسي للعدد z العدد العقدي $\ln|z| + iArg(z)$ ونرمز إليه بالرمز $Log(z)$ ونسمّي التابع:

$$Log : U_\pi \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto Log(z)$$

تابع اللوغاريتم الرئيسي على U_π.

لمّا كان

$$Arg(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$$

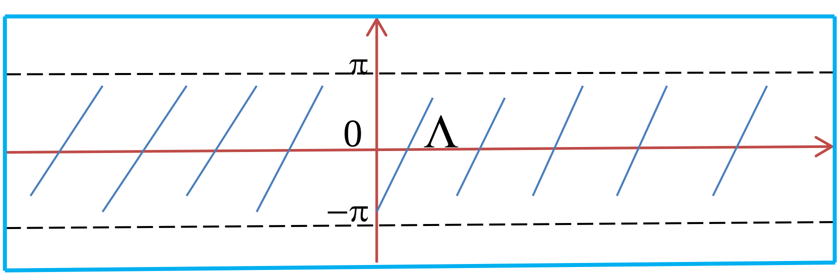
استنتجنا أنّ مقصور تابع اللوغاريتم الرئيسي على المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ يتطابق مع تابع اللوغاريتم الطبيعي $\ln$، أي $\ln = Log_{|\mathbb{R}_+^*}$.

5.5. مبرهنة

يعرّف تابع اللوغاريتم الرئيسي تقابلاً بين المجموعة U_π والمجموعة:

$$\Lambda = \{x + iy : (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\}$$

ويكون التابع العكسي هو $\exp_{|\Lambda}$ أي مقصور التابع الأسّي على المجموعة Λ.



إثبات

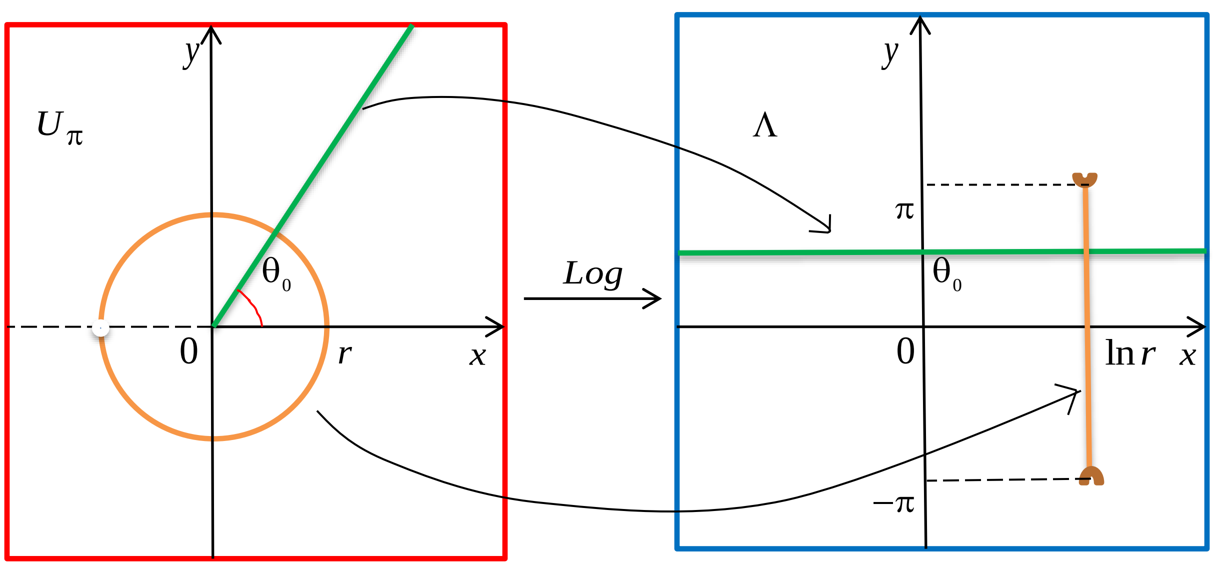
نلاحظ أولاً أنّ التابع Log متباين لأنّ $e^{Log(z)}=z \quad \forall z\in U_\pi,$ ومن جهة أخرى نرى بسهولة، من التعريف، أنّ:

$$\forall(x+iy)\in\Lambda,\quad Log\left(e^{x+iy}\right)=x+iy$$

وهو المطلوب إثباته.

ويتيقّن القارئ أنّه عندما يتغيّر العدد z على نصف المستقيم المفتوح $D_{\theta_0}=\{re^{i\theta_0}: r\in\mathbb{R}_+^*\}$ ترسم صورته $\omega=Log(z)$ المستقيم $\{\omega:\operatorname{Im}(\omega)=\theta_0\}$، وعندما تتحوّل z على الدائرة $C(0,r)$ التي مركزها 0 ونصف قطرها $0<r$ (محذوفًا منها النقطة $-r$)، فإنّ صورتها $\omega=Log(z)$ ترسم المجال المفتوح:

$$\{\omega:(\operatorname{Re}\omega=\ln r)\wedge(\operatorname{Im}\omega\in]-\pi,\pi[)\}$$

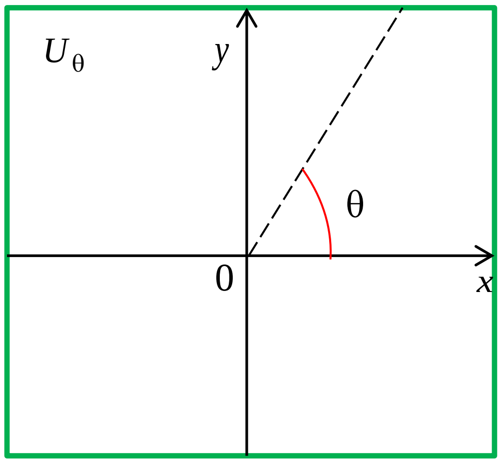


وبملاحظة أنّ التحويل الهندسي $z\mapsto ze^{i\theta}$ مع θ عدد حقيقي هو دوران مركزه الصفر وزاويته θ. نضع التعريف التالي:

تعريف

ليكن θ عددًا حقيقيًّا. لنعرّف المجموعة التالية:

$$U_\theta=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\theta\notin\arg(z)\right\}$$



يعرِّف التابع التالي:

$$z\mapsto Log\left(ze^{i(\pi-\theta)}\right)+i(\theta-\pi)$$

تقابلاً بين U_θ والمجموعة:

$$\Lambda_\theta=\left\{x+iy:(x,y)\in\mathbb{R}\times\left]\theta-2\pi,\theta\right[\right\}$$

ويكون التابع العكسي هو $\exp_{|\Lambda_\theta}$ أي مقصور التابع الأسّي على المجموعة Λ_θ.

التعيينات المستمرّة للوغاريتم

تعريف

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. نسمّي تعيينًا مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على Ω كلّ تابع مستمرّ $\varphi:\Omega\to\mathbb{C}$ يحقّق:

$$\forall z\in\Omega,\quad e^{\varphi(z)}=z$$

ونسمّي تعيينًا مستمرًّا للزاوية على Ω، كلّ تابع مستمر $\theta:\Omega\to\mathbb{R}$ يحقّق:

$$\forall z\in\Omega,\quad \frac{z}{|z|}=e^{i\theta(z)}$$

إنّ المفهومين السابقين مرتبطين معًا ارتباطًا وثيقًا، إذ يكون $\varphi:\Omega\to\mathbb{C}$ تعيينًا مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على Ω، إذا كان $z\mapsto \operatorname{Im}(\varphi(z))$ تعيينًا مستمرًّا للزاوية على Ω، ويكون التابع $\theta:\Omega\to\mathbb{R}$ تعيينًا مستمرًّا للزاوية على Ω إذا كان $z\mapsto \ln|z|+i\theta(z)$ تعيينًا مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على Ω.

6.5. مبرهنة

إنّ تابع اللوغاريتم الرئيسي Log تعيين مستمرٌّ للتابع اللوغاريتمي على U_π. وبقول مكافئ Arg هو تعيين مستمرٌّ للزاوية على المجموعة U_π.

إثبات

إنّ هذه النتيجة واضحة بملاحظة أنّ:

$$\forall z\in U_\pi,\quad Arg(z)=2\arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z+|z|}$$

فالتابع Arg مستمرٌّ على U_π.

وبناءً على ما سبق نرى أنّ النتيجة التالية واضحة:

نتيجة

من أجل كل عدد حقيقي θ، التابع $z\mapsto Log\left(ze^{i(\pi-\theta)}\right)+i(\theta-\pi)$ تعيين مستمرٌّ للتابع اللوغاريتمي على المجموعة:

$$U_\theta=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\theta\notin\arg(z)\right\}$$

7.5. مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$ ولنفترض وجود تعيين مستمرّ φ للتابع اللوغاريتمي على Ω عندئذ يكون كلُّ تعيين مستمر للتابع اللوغاريتمي على Ω من الصيغة:

$$f_k:\Omega\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\varphi(z)+2\pi ik$$

حيث k عدد من $\mathbb{Z}$.

وبقول مكافئ: إذا وُجد تعيين مستمر Θ للزاوية على Ω، كان كل تعيين مستمر للزاوية على Ω من الصيغة:

$$g_k : \Omega \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \Theta(z) + 2\pi k$$

حيث k عدد من $\mathbb{Z}$.

إثبات

في الحقيقة، يكفي أن نثبت الجزء الأوّل من المبرهنة. من الواضح أنّ التوابع $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ هي تعيينات مستمرّة للتابع اللوغاريتمي على Ω.

ومن جهة أخرى، إذا كان $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تعييناً مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على Ω عرّفنا التابع:

$$\lambda : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f(z) - \varphi(z)\right)$$

إنّ λ تابع مستمرٌّ على Ω ويحقّق الخاصّة:

$$\forall z \in \Omega, \quad e^{2\pi i\lambda(z)} = e^{f(z)-\varphi(z)}$$

$$= \frac{\exp(f(z))}{\exp(\varphi(z))} = 1$$

وبناءً على هذا يكون:

$$\forall z \in \Omega, \quad \lambda(z) \in \mathbb{Z}$$

لنتأمّل الآن عنصراً (a,b) من Ω^2 لمّا كانت Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة استنتجنا وجود سبيل من a إلى b محتوى في Ω، أي تابع مستمر $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ يحقّق $\gamma([0,1]) \subset \Omega$ و $\gamma(0) = a$ و $\gamma(1) = b$ وعندها يكون التابع $t \mapsto (\lambda \circ \gamma)(t)$ مستمرًّا على المجال $[0,1]$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{Z}$. فهو إذن تابع ثابت (صورة مجال بتابع مستمر هي مجال وفي حالتنا لابدّ أن يكون هذا المجال أحادي العنصر) استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى.

وبناءً على هذا يكون:

$$\lambda(a) = \lambda(\gamma(0)) = \lambda(\gamma(1)) = \lambda(b)$$

بذا يكون التابع λ ثابتًا على Ω أي يوجد k في $\mathbb{Z}$ يحقّق:

$$\forall z \in \Omega, \quad \lambda(z) = k$$

وهذا يقتضي صحة المساواة $f = f_k$ ويتم إثبات المطلوب.

ملحوظة

من الخطأ الاعتقاد بوجود تعيين للتابع اللوغاريتمي، أو للزاوية، على أيّة مجموعة مفتوحة مترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$.

لنتأمّل على سبيل المثال $\Omega = \mathbb{C}^*$، ولنفترض وجود تعيين مستمر g للزاوية على Ω، حينئذ يكون $g_{|U_\pi}$ تعييناً مستمرًّا للزاوية على U_π. إذن يوجد k في $\mathbb{Z}$ يحقّق:

$$\forall z \in U_\pi, \quad g(z) = Arg(z) + 2\pi k$$

ينتج من ذلك أنّ:

$$\lim_{\substack{z \to -1 \\ \operatorname{Im} z < 0}} g(z) = (2k-1)\pi$$

$$\lim_{\substack{z \to -1 \\ \operatorname{Im} z > 0}} g(z) = (2k+1)\pi$$

وهذا يناقض استمرار g عند النقطة -1.

نتيجة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. إذا وُجد تعيينان مستمرّان للتابع اللوغاريتمي على Ω واتفقا في نقطة من Ω كانا متساويين على Ω.

إثبات

لنفترض أنّ φ و ψ تعيينان مستمرّان للتابع اللوغاريتمي على Ω. عندئذ نستنتج من المبرهنة السابقة وجود عدد صحيح k يحقّق:

$$\forall z \in \Omega, \quad \psi(z) = \varphi(z) + 2\pi i k$$

ولأنّه، استناداً إلى الافتراض يوجد عدد، وليكن هو z_0 من Ω يحقّق $\psi(z_0) = \varphi(z_0)$، استنتجنا أنّ $k = 0$. إذن:

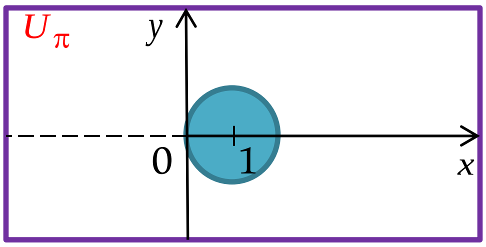
$$\forall z \in \Omega, \quad \psi(z) = \varphi(z).$$

وهي الخاصيّة المرجوّة.

❁ فمثلاً تابع اللوغاريتم الرئيسي Log هو التعيين المستمر الوحيد F للتابع اللوغاريتمي على U_π الذي يحقّق $F(1)=0$ وهو أيضًا التعيين المستمر الوحيد للتابع اللوغاريتمي على U_π الذي يكون مقصوره على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تمامًا مساويًا تابع اللوغاريتم الطبيعي $\ln$.

8.5. مبرهنة

$$\forall z \in D(0,1), \quad Log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$



إثبات

من الواضح أنّ نصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ يساوي 1، فهي متقاربة على القرص $D(0,1)$ لنرمز بالرمز $f(z)$ إلى مجموع هذه السلسلة حين يكون z عنصرًا من $D(0,1)$.

نعلم أنّ f هولومورفي على $D(0,1)$ وأنّ:

$$\forall z \in D(0,1), \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

$$= \frac{1}{1+z}$$

ليكن $\mathcal{D} = D(1,1)$ أي القرص المفتوح الذي مركزه 1 ونصف قطره 1. ولنعرّف:

$$\forall z \in \mathcal{D}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z} \exp\left(f(z-1)\right)$$

إنّ φ تابع هولومورفي على $\mathcal{D}$ ويحقّق:

$$\forall z\in\mathcal{D},\quad \varphi'(z)=-\frac{1}{z}\varphi(z)+\frac{1}{z}\exp\big(f(z-1)\big)\cdot f'(z-1)$$
$$=-\frac{\varphi(z)}{z}+\frac{\varphi(z)}{z}=0$$

فهو إذن تابع ثابتٌ على المجموعة المفتوحة والمترابطة $\mathcal{D}$. ولمّا كان $\varphi(1)=1$ استنتجنا من ذلك أنّ:

$$\forall z\in\mathcal{D},\quad \exp\big(f(z-1)\big)=z$$

فالتابع $z\mapsto f(z-1)$ هو التعيين المستمر الوحيد للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ الذي يأخذ القيمة 0 عند 1. ولمّا كان $U_\pi\supset\mathcal{D}$ كان $Log_{|\mathcal{D}}$ أيضًا تعيينًا مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ يأخذ القيمة 0 عند 1. وينتج من الوحدانية أنّ:

$$\forall z\in\mathcal{D},\quad f(z-1)=Log(z)$$

وهذا يكافئ الخاصّة المطلوبة.

9.5. مبرهنة

إنّ تابع اللوغاريتم الرئيسي Log تابع تحليلي على U_π، فهو بوجه خاص هولومورفي، ويحقّق:

$$\forall z\in U_\pi,\quad Log'(z)=\frac{1}{z}$$

إثبات

ليكن z_0 عنصرًا من U_π، ولتكن r_0 المسافة بين z_0 و $\mathbb{R}_-$ (أي $r_0=|\operatorname{Im}z_0|$ في حالة $\operatorname{Re}z_0\le 0$، و $r_0=|z_0|$ في حالة $\operatorname{Re}z_0>0$) عندئذ يكون $\mathcal{D}_0=D(z_0,r_0)\subset U_\pi$ ويكون التابعان $z\mapsto Log(z)$ و $z\mapsto Log(z_0)+Log\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)$ تعيينين مستمرين للتابع اللوغاريتمي على القرص $\mathcal{D}_0$، وهما يأخذان القيمة نفسها عند z_0. لأنّ:

$$\forall z\in\mathcal{D}_0,\quad \exp\left(Log(z_0)+Log\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)\right)=z_0\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)=z.$$

نستنتج من ذلك صحة المساواة:

$$\forall z \in \mathcal{D}_0, \quad Log(z) = Log(z_0) + Log\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$$

ولكن $\left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$ في حالة z من $\mathcal{D}_0$، وهذا يؤدي، بمقتضى المبرهنة السابقة، إلى ما يأتي:

$$\forall z \in \mathcal{D}_0, \quad Log(z) = Log(z_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n$$

بذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع Log تحليلي على U_π، وبوجه خاص هولومورفي على U_π.

ونستنتج من اشتقاق طرفي المساواة $\exp(Log(z)) = z$ أنّ:

$$\forall z \in U_\pi, \quad Log'(z) = \frac{1}{z}$$

نتيجة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}^*$. وليكن f تعيينًا مستمرًّا للتابع اللوغاريتمي على Ω. عندئذ يكون f تابعًا تحليليًّا على Ω ويكون:

$$\forall z \in \Omega, \quad f'(z) = \frac{1}{z}$$

إثبات

ليكن z_0 عنصرًا من Ω. إذا كان z_0 لا ينتمي إلى $\mathbb{R}_-$، كان z_0 عنصرًا من المجموعة المفتوحة $\Omega \cap U_\pi$ ووجدنا قرصًا مفتوحًا $\mathcal{D} = D(z_0, r)$ محتوى بالكامل في $\Omega \cap U_\pi$. أمّا في حالة z_0 من $\mathbb{R}_-^*$، فعندئذ يكون z_0 عنصرًا من المجموعة المفتوحة $\Omega \cap U_{2\pi}$، ووجدنا قرصًا مفتوحًا $\mathcal{D} = D(z_0, r)$ محتوى بالكامل في $\Omega \cap U_{2\pi}$ (تذكّر أنّ $U_{2\pi} = -U_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$).

- في حالة $\mathcal{D} \subset U_\pi$، يكون التابعان $f_{|\mathcal{D}}$ و $Log_{|\mathcal{D}}$ تعيينين للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ فهما يختلفان بثابت على $\mathcal{D}$.
- وفي حالة $\mathcal{D} \subset U_{2\pi}$ يكون التابعان $f_{|\mathcal{D}}$ و $z \mapsto Log(-z) + i\pi$ أيضًا تعيينين مستمرّين للتابع اللوغاريتمي على $\mathcal{D}$ ومن ثمّ يختلفان فقط بثابت على $\mathcal{D}$.

ولمّا كانت الخاصيّة المطلوبة خاصيّة محليّة، (أي يكفي تحققها في جوار كل نقطة من Ω حتى تتحقّق على كامل Ω) فإنّ المناقشة السابقة تبيّن أنّه يكفي لإثبات المطلوب أن يحقّق تابع اللوغاريتم الرئيسي الخاصيّة المرجوّة. ويكتمل البرهان اعتمادًا على المبرهنة السابقة.

تابع القوّة

تعريف

ليكن α عددًا عقديًّا. نعرّف تابع القوّة (أو تابع الرفع) ذو الأس α بأنّه التابع:

$$\mathcal{P}_\alpha : U_\pi \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^\alpha := \exp(\alpha Log(z))$$

في حالة α من $\mathbb{R}$ نرى بجلاء أنّ مقصور التابع $\mathcal{P}_\alpha$ على $\mathbb{R}_+^*$ هو تابع القوّة ذو الأس α المألوف. لنبحث كيف تنتقل خواص ذلك التابع الحقيقي إلى هذا التابع المعرّف في الساحة العقديّة.

- مهما تكن (α,β) من $\mathbb{C}^2$ ومهما تكن z من U_π فإنّ $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$ وذلك لأنّ:

$$\begin{aligned}\exp(\alpha Log(z))\cdot\exp(\beta Log(z)) &= \exp(\alpha Log(z)+\beta Log(z))\\ &= \exp((\alpha+\beta)Log(z))\\ &= z^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

وبوجّه خاص $z^\alpha \cdot z^{-\alpha} = z^0 = 1$ وذلك أيًا كان z من U_π.

- في الحالة الخاصّة الموافقة للأس الصحيح α من $\mathbb{Z}$ نرى، إذا كان $0<\alpha$، أنّه:

$$\begin{aligned}z^\alpha &= \exp(Log(z))\times\cdots\times\exp(Log(z))\\ &= z\times\cdots\times z\end{aligned}$$

وإذا كان $\alpha=0$ فإنّ $z^0=1$، وأخيرًا حين يكون $\alpha>0$، فإنّ $z^\alpha = \frac{1}{z^{-\alpha}}$ فالتابع $\mathcal{P}_\alpha$ يتطابق مع المقصور على U_π للتابع $z \mapsto z^n$ المعرّف بأسلوب تقليدي على $\mathbb{C}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$، وعلى $\mathbb{C}^*$ في حالة n من $-\mathbb{N}^*$.

- إنّ التابع $\mathcal{P}_\alpha$ هولومورفي على U_π، لأنّه ناتج تركيب توابع هولومورفيّة، ولدينا:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\alpha'(z) &= \left(\alpha Log(z)\right)' \cdot \exp'\left(\alpha Log(z)\right) \\ &= \frac{\alpha}{z} z^\alpha \\ &= \alpha z^{\alpha-1} \\ &= \alpha \mathcal{P}_{\alpha-1}(z)\end{aligned}$$

وذلك أيًا كانت z من U_π. ونستنتج من ذلك أنّ هذا التابع يقبل الاشتقاق عددًا لا نهائيًا من المرات، وأنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و z من U_π لدينا:

$$\left(\mathcal{P}_\alpha\right)^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)z^{\alpha-n}$$

10.5. مبرهنة

لتكن α من $\mathbb{C}$. عندئذ:

$$\forall z \in D(0,1), \quad (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

نتيجة

لتكن α من $\mathbb{C}$. عندئذ يكون تابع القوّة $\mathcal{P}_\alpha$ تحليليًّا على U_π.

تكامل تابع عقدي على طريق

تعريف

لتكن U مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : U \to \mathbb{C}$ تابعًا عقديًّا مستمرًّا، وأخيرًا ليكن Γ طريقًا من الصف C^1 قطعيًّا محتوى في U، ومعطى بالتمثيل الوسيطي $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ عندئذ نضع بالتعريف:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt \qquad (\Diamond)$$

لاحظ أنّ التابع $t \to \gamma'(t)$ قد لا يكون معرّفًا عند عدد منته من نقاط المجال $[a,b]$، ولكن يمكن تمديده إلى تابع مستمر قطعيًّا على $[a,b]$، وهذا ما أتاح لنا وضع التعريف السابق.

تعريف

نقول عن مجموعة غير خالية A من $\mathbb{C}$ أنّها نجميّة إذا وُجد في A عنصر a يحقّق الشرط:

$$\forall x \in A, \forall t \in [0,1], \quad (1-t)a + tx \in A.$$

ملحوظة

كل مجموعة نجميّة هي جزء مترابط.

11.5. مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ونجميّة من $\mathbb{C}$، ولتكن ω من Ω. وأخيرًا ليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعًا مستمرًّا على Ω وهولومورفيًّا على $\Omega \setminus \{\omega\}$. عندئذ يوجد تابع $F : \Omega \to \mathbb{C}$ هولومورفيٌّ على Ω ويحقّق $f = F'$.

نظريّة كوشي ونتائجها

12.5. مبرهنة ـ كوشي ـ

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ونجميّة من $\mathbb{C}$، وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. عندئذ أيًا كان الطريق المغلق Γ من الصف C^1 قطعيًّا المحتوى في Ω، وأيًا كانت ω من $\Omega \setminus \Gamma$ فإنّ:

$$f(\omega) \cdot Ind(\omega, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\omega} dz$$

حيث العدد الصحيح $Ind(\omega, \Gamma)$ يساوي تعريفًا $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-\omega}$ ونسمّيه دليل النقطة ω بالنسبة للطريق Γ وهو يمثل العدد الجبريّ للمرات التي يلتف فيها الطريق Γ حول النقطة ω.

تفيدنا المبرهنة السابقة في إثبات نتيجة مهمّة تتعلّق بالتوابع الهولومورفيّة وهي كون هذه التوابع تحليليّة وهذه نتيجة مُفاجِئة لعدم وجود ما يُكافئها في التحليل الحقيقي.

13.5. مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. عندئذ يكون f تحليليًّا في Ω.

في الحقيقة، نحن لن نخوض في إثبات هذه المبرهنة غير أننا سنقول الآتي:
بعد القيام ببعض الإجراءات نجد من أجل أي عنصر z_0 من Ω قرصًا مفتوحًا $D(z_0,r)$ محتوى تمامًا في قرص مفتوح $D(z_0,R)$ مع $\Omega\supset D(z_0,R)$ بحيث:

$$\forall z\in D(z_0,r),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

حيث:

$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

أيًا كان n من $\mathbb{N}$. وهذا يثبت أنّ f تابع تحليلي على Ω.

ملحوظة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. لقد وجدنا في المبرهنة السابقة أنّ f تابع تحليلي وأنّ سلسلة تايلور للتابع f عند z_0 تتقارب على كلِّ قرص مفتوح $D(z_0,r)$ محتوى تمامًا في قرص مفتوح $D(z_0,R)$ موجود داخل Ω. وهذا يعني أن نصف قطر تقارب سلسلة تايلور للتابع f عند z_0 أكبر أو يساوي نصف قطر أي قرص مفتوح مركزه z_0 ومحتوى في Ω، أي أكبر أو يساوي المسافة بين z_0 و $\mathbb{C}\setminus\Omega$ في حالة $\Omega\neq\mathbb{C}$، أو يساوي $+\infty$ في حالة $\Omega=\mathbb{C}$ وبناءً على هذا نستنتج:

$$\forall z_0\in\Omega,\quad \forall z\in D\left(z_0,d\left(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega\right)\right),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

وقد رمزنا بالرمز $d(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega)$ إلى المسافة بين z_0 و $\mathbb{C}\setminus\Omega$، وهي تساوي $+\infty$ في حالة $\Omega=\mathbb{C}$. ولقد أثبتنا أيضًا أنّه في حالة $\Omega\supset\overline{D}(z_0,r)$ يكون:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

نتيجة

لتكن Ω مجموعة <u>مفتوحة</u> وغير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. عندئذ يكون f' هولومورفيًّا أيضًا.

إثبات

إنّ هذه النتيجة واضحة، بسبب صحّة الاقتضاءات الآتية:

(f هولومورفي) $\Rightarrow$ (f تحليلي) $\Rightarrow$ (f' تحليلي) $\Rightarrow$ (f' هولومورفي).

نتيجة – متراجحات كوشي –

ليكن $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. نعلمُ أنّه توجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي R تُحقّق:

$$\forall z\in D(0,R),\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$$

ونعلم حسب المبرهنة 13.5. أنّه إذا كانت r من $]0,R[$ كان:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f\left(re^{i\theta}\right)d\theta$$

وبناءً على هذا، إذا عرّفنا $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$ كان لدينا:

$$\text{(متراجحات كوشي)}\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n|\leq\frac{M(r)}{r^n}$$

14.5. مبرهنة – ليوفيل –

ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا، ومحدودًا على $\mathbb{C}$. عندئذ يكون التابع f ثابتًا على $\mathbb{C}$.

إثبات

ليكن $M=\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$. نعلم، استنادًا إلى الملحوظة الأخيرة، أنّه توجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ نصف قطر تقاربها يساوي $+\infty$ تحقّق:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

واستنادًا إلى متراجحات كوشي لدينا:

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le \frac{M}{r^n}$$

فإذا جعلنا r تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ $a_n = 0$ أيًا كانت $0 < n$. وهذا يقتضي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a_0$$

وهي النتيجة المطلوبة.

15.5. مبرهنة – مساواة بارسفال -

ليكن $f : D(a,R) \to \mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. نعلمُ أنّه توجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\ge0} a_n z^n$ نصف قطر تقاربها أكبر أو يساوي R تُحقّق:

$$\forall z \in D(a,R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

وعندئذ يكون:

$$\forall r \in]0,R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta$$

إثبات

أنظر كتاب التحليل 4 لمؤلفه د. عمران قوبا.

16.5. مبرهنة – مبدأ الطويلة العظمى –

لتكن Ω مجموعة <u>مفتوحة ومترابطة</u> غير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. ولتكن $\Omega \supset \overline{D}(a,r)$. عندئذ يكون:

$$|f(a)| \le \max_{\theta \in \mathbb{R}} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان f ثابتًا في Ω.

إثبات

لنفترض جدلاً أنّ $\left|f\left(a+re^{i\theta}\right)\right|\le\left|f\left(a\right)\right|$ $\forall\theta\in\mathbb{R},$. ولنفترض أنّ:

$$\forall z\in\overline{D}(a,r),\quad f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(z-a\right)^n$$

عندئذ يكون لدينا استنادًا إلى المبرهنة السابقة،

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n\right|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(a+re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta\le\left|f\left(a\right)\right|^2=\left|a_0\right|^2$$

وبناءً على هذا يكون $a_n=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*,$ ، إذن $f\left(z\right)=f\left(a\right)$ مهما تكن z من $\overline{D}(a,r)$ ،
ولمّا كانت Ω مترابطة نتج أنّ التابع f ثابتٌ على Ω.

نتيجة ـ مبدأ الطويلة العظمى ـ (الصيغة الأولى)

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة غير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا.
ولنفترض أنّ التابع f يقبل قيمة محليّة عظمى a من Ω. عندئذ يكون التابع f ثابتًا على Ω
.

إثبات

بما أنّ a قيمة محليّة عظمى للتابع f وجدنا قرصًا مفتوحًا $D(a,r)$ مع $\Omega\supset\overline{D}(a,r)$ بحيث يكون:

$$\forall z\in\overline{D}(a,r),\quad \left|f\left(z\right)\right|\le\left|f\left(a\right)\right|.$$

ومن ثمّ يكون التابع f ثابتًا على Ω استنادًا إلى المبرهنة السابقة.

نتيجة – مبدأ الطويلة العظمى – (الصيغة الثانية)

لتكن Ω مجموعة مفتوحة ومحدودة ومترابطة وغير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ تابعًا مستمرًّا، وهولومورفيًّا على Ω. نعرّف حدود Ω بالصيغة $\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega$. عندئذ:

$$\forall z\in\Omega,\quad \left|f\left(z\right)\right|\le\sup_{\xi\in\partial\Omega}\left|f\left(\zeta\right)\right|$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان f ثابتًا في $\overline{\Omega}$.

إثبات

لمّا كانت $\overline{\Omega}$ مجموعة متراصّة لأنّها مغلقة ومحدودة، استنتجنا أنّ $z \mapsto |f(z)|$ يبلغ حدّه الأعلى على $\overline{\Omega}$. أي يوجد عنصر a في $\overline{\Omega}$ يُحقّق:

$$|f(a)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$$

وهنا نناقش حالتين:

- حالة a من $\partial\Omega$: في هذه الحالة يكون $\sup_{\xi\in\partial\Omega} |f(\xi)| = |f(a)|$ وتتحقّق المتراجحة:

$$\forall z \in \Omega, \quad |f(z)| \le \sup_{\xi\in\partial\Omega} |f(\xi)|$$

- حالة a من Ω: عندئذ نستنتج من كون المجموعة Ω مفتوحة، أنّه يوجد عددٌ موجبٌ تمامًا r يُحقّق $D(a,r) \subset \Omega$. وعندئذ نستنتج من تعريف a أنّ:

$$|f(a)| \ge \max_{\theta\in\mathbb{R}} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|$$

ونستنتج من المبرهنة 16.5. أنّ $|f(a)| \le \max_{\theta\in\mathbb{R}} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|$. إذن:

$$|f(a)| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|$$

وهذا يقتضي، بناءً على المبرهنة 16.5. نفسها أنّ f ثابتٌ على Ω، ومن ثمّ على $\overline{\Omega}$ لأنّه مستمرٌّ عليها. وبذا يكتمل الإثبات.

17.5. مبرهنة – دالامبير –

ليكن كثير الحدود P من $\mathbb{C}[X]$. نفترض أنّ درجة كثير الحدود P أكبر أو تساوي 1. عندئذ يوجد في $\mathbb{C}$ عددٌ z_0 يُحقّق $P(z_0) = 0$.

إثبات

يمكننا أن نفترض كثير الحدود P واحديًّا، أي:

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

مع $\deg P = n > 0$. لنختر عددًا r يحقّق $r > 1 + |a_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. عندئذ أيًا كان θ من $\mathbb{R}$ فلدينا:

$$\left|P\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq r^n - \sum_{k=0}^{n-1}|a_k| r^k$$
$$\geq r^{n-1}\left(r - \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right) \geq 1 + |a_0| > |P(0)|$$

فلو افترضنا جدلاً أنّ $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C},$ ، استنتجنا أنّ التابع $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ تابع هولومورفي في $\mathbb{C}$، ويُحقّق $|f(0)| > \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$ أيًا كان θ من $\mathbb{R}$. وهذا يتناقض مع نتيجة المبرهنة السابقة.

18.5. مبرهنة ـ شوارتز ـ

ليكن $f : D(0,1) \to D(0,1)$ تابعًا هولومورفيًّا يحقّق $f(0) = 0$. عندئذ يكون:

$$\forall z \in D(0,1), \quad |f(z)| \leq |z|$$

وإذا وُجِد عدد z_0 من $D(0,1) \setminus \{0\}$ بحيث $|f(z_0)| = |z_0|$ كان f دورانًا حول الصفر. أي:

$$\exists \lambda \in S^1 : \quad f(z) = \lambda z, \ \forall z \in D(0,1).$$

إثبات

لنتأمّل التابع:

$$g : D(0,1) \to \mathbb{C},$$
$$z \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}; & z \neq 0, \\ f'(0); & z = 0. \end{cases}$$

بما أنّ f تحليلي على قرص الوحدة فهو يقبل نشرًا بجوار الصفر. أي:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

بما أنّ $f(0) = 0$ فإنّه من أجل $z \neq 0$ لدينا:

$$\frac{f(z)}{z} = f'(0) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-1}$$

إذن التابع g تحليلي على المفتوح $D(0,1) \setminus \{0\}$. ومن أجل $z \neq 0$ نرى بجلاء أنّ:

$$\frac{g(z)-g(0)}{z-0}=\frac{\frac{f(z)}{z}-f'(0)}{z}$$
$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}$$

وبالتالي لدينا:

$$g'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{g(z)-g(0)}{z-0}=\frac{f^{(2)}(0)}{2!}$$

موجودة.

إذن التابع g هولومورفي على القرص المفتوح $D(0,1)$.

لنعتبر الآن التابع التالي:

$$M:\,]0,1[\,\to\mathbb{R}_+$$
$$r\mapsto M(r)=\sup_{|z|=r}|g(z)|$$

التابع M متزايد لما يلي:

لنعتبر الزوج (r,r') من $(]0,1[)^2$ المحقّق للشرط $0<r<r'<1$. بتطبيق مبدأ الطويلة العظمى على مقصور التابع g على المجموعة $\overline{D}(0,r')$ نجد:

$$\forall z\in D(0,r'),\quad |g(z)|\le M(r') \qquad (*)$$

وبالتالي $M(r)\le M(r')$.

من جهة أخرى نلاحظ أنّ:

$$M(r')=\sup_{|z|=r'}|g(z)|=\frac{1}{r'}\sup_{|z|=r'}|f(z)|\le\frac{1}{r'}$$

واعتمادًا على تزايد التابع M نجد:

$$M(r)\le M(r')\le\frac{1}{r'}$$

وبالسعي بـ r' نحو الـ 1 نجد:

$$\forall r\in\,]0,1[,\quad M(r)\le 1 \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نحصل على:

$$\forall z\in D(0,r'),\quad |g(z)|\le 1$$

ولمّا كان r' عددًا كيفيًا من المجال $]0,1[$ استنتجنا أنّ $\forall z\in D(0,1),\quad |g(z)|\le 1$ الذي ينتج عنها أنّ:

$$\forall z\in D(0,1),\quad |f(z)|\le |z|$$

أخيرًا، إذا وُجدت نقطة z_0 من $D(0,1)\setminus\{0\}$ تُحقّق $|f(z_0)|=|z_0|$ أي $|g(z_0)|=1$ كانت z_0 قيمة عظمى للتابع g، إذن التابع g ثابت على القرص المفتوح $D(0,1)$. وبما أنّ $|g(z_0)|=1$ فإنّه يوجد عنصر λ من S^1 يُحقّق $\forall z\in D(0,1),\quad g(z)=\lambda$. أي:

$$\forall z\in D(0,1),\quad f(z)=\lambda z$$

وهو المطلوب.

صار من الممكن الآن أن نعمل بهذه النتيجة القاعديّة.

نتيجة قاعديّة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. عندئذ يكون:

1) f تحليلي على Ω
2) f مستمر على Ω
3) f يقبل الاشتقاق عددًا لا نهائيًّا من المرات وجميع مشتقاته تحليليّة
4) f يتطابق محليًّا مع مجموع سلسلة تايلور الموافقة له بحيث:

$$\forall z_0\in\Omega,\quad z\in D\big(z_0,d(z_0,\mathbb{C}\setminus\Omega)\big)\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

وإذا كان $\Omega\supset\overline{D}(z_0,r)$ كان:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

فإذا وضعنا:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

$$M(r)=\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|$$

وجدنا ما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}$$

(متراجحات كوشي)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta$$

(مساواة بارسفال)

متتاليات وسلاسل التوابع الهولومورفيّة

نأتي الآن إلى مبرهنة مهمّة ليس لها مُكافئ في التحليل الحقيقي.

19.5. مبرهنة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، ثُمّ لتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω. نفترض أنّ المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من تابع f. عندئذ يكون f هولومورفيًّا على Ω وتتقارب المتتالية $(f'_n)_n$ بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من Ω من التابع f'.

وتنتج الخاصّة التالية بالتراجع:

نتيجة

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، ثمّ لتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω. نفترض أنّ المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة من Ω من تابع f. عندئذ يكون f هولومورفيًّا على Ω وتتقارب المتتالية $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة من Ω من التابع $f^{(p)}$، وذلك أيًا كان p من $\mathbb{N}^*$.

نتيجة

لتكن Ω مجموعة <u>مفتوحة</u> غير خالية من $\mathbb{C}$، ثمّ لتكن $(f_n)_n$ متتالية من التوابع الهولومورفيّة على Ω. نفترض أنّ السلسلة $\sum_{n\geq 0} f_n$ متقاربة بانتظام (أو نظيميًّا) على كلّ مجموعة متراصّة من Ω. عندئذ يكون مجموعها $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ هولومورفيًّا على Ω. ويكون $f^{(p)}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$ ، وذلك أيًا كانت p من $\mathbb{N}^*$.

فمثلاً، نترك للقارئ أن يتيقّن، بتطبيق النتيجة السابقة، أنّ تابع ريمان المعرّف بالعلاقة:

$$z \mapsto \zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$$

هو تابع هولومورفي في نصف المستوي $\mathbb{P}_1=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>1\}$.

6. الأعمال الموجّهة

تمارين محلولة

التمرين 1

• نقول عن تطبيق $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ أنّه $\mathbb{R}$ ـ خطّي إذا وفقط إذا كان L تطبيقًا خطّيًا على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ ذو المؤثر الحقيقي $\mathbb{R}$. أي إذا حقّق ما يلي:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall(u,v)\in\mathbb{C}^2,\quad L(xu+yv)=xL(u)+yL(v)$$

• ونقول عن L أنّه $\mathbb{C}$ ـ خطّي إذا كان L تطبيقًا خطّيًا على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ ذو المؤثر العقدي $\mathbb{C}$. أي إذا حقّق الشرط:

$$\forall u\in\mathbb{C},\quad L(u)=uL(1)$$

• وأخيرًا نقول عن L أنّه $\mathbb{C}$ ـ ضد خطّي إذا وفقط إذا حقّق الشرط:

$$\forall u\in\mathbb{C},\quad L(u)=\bar{u}L(1)$$

المطلوب:

1) أعط الكتابة المصفوفيّة للتابع L في كل حالة.

2) تأكّد من صحة المساواة التالية:

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})\oplus L_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$$

حيث رمزنا بـ $L_K(E)$ إلى مجموعة التطبيقات الـ K ـ خطيّة على الفضاء الشعاعي E. وبالرمز $L_{\overline{K}}(E)$ إلى مجموعة التطبيقات الـ K ـ ضد خطيّة على E.

حل التمرين 1

1) نعلم أنّ الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$ هو فضاء شعاعي بعده 2 وأساسه القانوني هو $\{1,i\}$ وبالتالي كل تطبيق $\mathbb{R}$ ـ خطّي يتعيَّن بتعيُّن صورة كل من العددين 1 و i وفق هذا التطبيق الـ $\mathbb{R}$ ـ خطّي. فإذا كان $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تطبيقًا $\mathbb{R}$ ـ خطّيًا بحيث:

$$f(i)=c+id \quad \text{و} \quad f(1)=a+ib$$

كان:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

أي أنّ $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(1) & \operatorname{Re} f(i) \\ \operatorname{Im} f(1) & \operatorname{Im} f(i) \end{pmatrix}$ هي مصفوفة التطبيق الخطّي f في الأساس القانوني $\{1,i\}$.

كما نلاحظ أيضًا أنّ التطبيقات الـ $\mathbb{C}$ ـ خطيّة والـ $\mathbb{C}$ ـ ضد خطيّة تتعيَّن بتعيُّن صورة العدد 1. فإذا كان g تطبيقًا $\mathbb{C}$ ـ خطّيًا و h تطبيقًا $\mathbb{C}$ ـ ضد خطّيًا بحيث:

$$g(1)=a+ib \quad \text{و} \quad h(1)=c+id$$

كان:

$$g(x,y)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$h(x,y)=\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

لكون $g(i)=ig(1)$ و $h(i)=-ih(1)$.

2) من السهل أن نلاحظ بأنّ التطبيقات الـ $\mathbb{C}$ ـ خطيّة (ضد خطيّة) هي تطبيقات $\mathbb{R}$ ـ خطيّة وأنّ $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})\cap L_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})=\{0\}$. إذن الخاصّة الوحيدة الواجب إثباتها هي الاحتواء الآتي:

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})\subseteq L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})+L_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$$

ليكن f تطبيقًا من $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ ولنطرح السؤال الآتي: هل يوجد زوج من التوابع (g,h) من $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})\times L_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C})$ بحيث $f=g+h$ ؟.

بالاستفادة من الكتابة المصفوفيّة لكل تابع من التوابع الثلاث تصبح المساواة $f=g+h$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وبعد المطابقة نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=a \\ \delta-\beta=c \\ \beta+\delta=b \\ \alpha-\gamma=d \end{cases}$$

وهذه الجملة تقبل حلاً وحيدًا نحصل عليه بحساب بسيط ها هو ذا:

$$(*)\begin{cases} \alpha=\dfrac{a+d}{2} \\ \beta=\dfrac{b-c}{2} \\ \gamma=\dfrac{a-d}{2} \\ \delta=\dfrac{c+b}{2} \end{cases}$$

إذن الزوج المطلوب (g,h) هو:

$$(x,y)\overset{g}{\mapsto}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x,y)\overset{h}{\mapsto}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

حيث تحقّق المعاملات $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ العلاقة $(*)$ ومن ثمّ صحة الاحتواء.

التمرين 2

هل يوجد تابع تحليلي f على U محقّق للشروط في الحالات المختلفة التالية:

1) U مفتوح يحوي الصفر بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n+3}\right)=0$$

2) $U=D(0,1)$ بحيث:

$$\forall n\geq 2,\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3) U مفتوح مترابط يحوي الصفر. بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$$

4) U مفتوح مترابط يحوي الصفر بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$$

5) U مفتوح يحوي الصفر بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le e^n$$

حل التمرين 2

1) التابع المعدوم يلبي الطلب.

2) إذا وُجد مثل هذا التابع f كان مستمرًّا عند الصفر ومن ثمّ تكون:

$$f(0) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln\frac{1}{n}} = 0$$

أي أنّ العدد $z_0 = 0$ هو صفر للتابع f. لتكن k رتبة تضاعف الصفر $z_0 = 0$ عندئذ يكون:

$$\forall z \in U, \quad f(z) = z^k g(z) \quad / \, g \in \vartheta(U \setminus \{0\}) \cap \mathcal{C}(U)$$

نعلم من جهة أنّ $\forall z \in U, \quad g(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n$ وبالتالي $g(0) = a_k \ne 0$.

ومن جهة أخرى:

$$\forall n \ge 2, \quad \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^k}\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

وعليه:

$$|g(0)| = \left|g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{\left|\ln\frac{1}{n}\right|} = +\infty$$

وهذا يتناقض مع كون $g(0) = a_k$. إذن لا يوجد تابع يحقّق الشرط المعطى.

3) لنفترض أنّ f موجود. في هذه الحالة نجد من استمرار f عند الصفر، أنّ:

$$f(0) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0$$

أي أنّ 0 ينتمي إلى $Z(f)$ مجموعة أصفار التابع f. كما أنّ المجموعة $\left\{\frac{1}{n}:\quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$ محتواةٌ في $Z(f)$، ما يجعل الصفر نقطة تراكم للمجموعة $Z(f)$، ومن ثمّ يكون f هو التابع المعدوم على U. وهذا يتنافى وكون:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}\neq 0,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

ومنه f غير موجود.

4) لنفترض أنّ f موجود. ولنستعمل في هذه الحالة طريقةً مختلفةً عن الطريقة السابقة قصد تحصيل فائدة أكبر، إذ نعتبر في هذه الحالة التابع التحليلي:

$$U\to\mathbb{C},\quad z\mapsto g(z)=f(z)-z$$

فنجد من استمرار التابع g عند الصفر، أنّ:

$$g(0)=g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

أي أنّ 0 ينتمي إلى $Z(g)$ مجموعة أصفار التابع g. كما أنّ المجموعة $\left\{\frac{1}{n}:\quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$ محتواةٌ في $Z(g)$، ما يجعل الصفر نقطة تراكم للمجموعة $Z(g)$، ومن ثمّ يكون g هو التابع المعدوم على U. هذا يعني أنّ:

$$\forall z\in U,\quad f(z)=z$$

وهذا يتناقض وكون $f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{n}\neq\frac{1}{2n+1}$ مهما كان n من $\mathbb{N}^*$. إذن التابع f غير موجود.

5) التابع الثابت $z\mapsto f(z)=e$ مثلاً، يلبي الطلب.

التمرين 3

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$.

أثبت صحة التكافؤ الآتي:

$\vartheta(U)$ حلقة تامّة $\Leftrightarrow$ U مترابط.

حل التمرين 3

$\Rightarrow$)

سنثبت هذا الاستلزام بطريقتين مختلفتين قصد توسيع نطاق تفكيرنا.

طريقة 1:

لنفترض أنّ U مفتوح مترابط من $\mathbb{C}$. ولنفترض وجود تابعين f و g تحليلين على U ومحققين للشرط $fg \equiv 0$ ، ولنفترض جدلاً أنّ كلا التابعين f و g غير معدوم. عندئذ تكون مجموعتا أصفارهما $Z(f)$ و $Z(g)$ معزولتين، ومن ثمّ عدودتين (أنظر الملحق في آخر الكتاب). ما يجعل المجموعة $U \setminus Z(f)$ تتمتع بقدرة المستمر (في تقابل مع $\mathbb{R}$)، كما يقتضي الشرط $fg \equiv 0$ أنّ $Z(g) \setminus Z(f) \neq \phi$ ، إذن باعتبار التطبيق:

$$W : Z(g) \setminus Z(f) \to U \setminus Z(f)$$
$$z \mapsto W(z) = z$$

فإنّ هذا الأخير ليس غامرًا لكون $card(Z(g) \setminus Z(f)) < card(U \setminus Z(f))$ ، وعليه يوجد عنصر z_0 ينتمي للمجموعة $U \setminus (Z(f) \cup Z(g))$. هذا يعني أنّ $f(z_0)g(z_0) \neq 0$ لأنّ $\mathbb{C}$ حقل (لا يحوي قواسم للصفر) وهذا يناقض الشرط $fg \equiv 0$ ، إذن على أحد التابعين f أو g أن يكون معدومًا.

طريقة 2:

لنفترض أنّ U مفتوح مترابط من $\mathbb{C}$. ولنفترض وجود تابعين f و g تحليلين على U ومحققين للشرط $fg \equiv 0$ بحيث f يختلف عن التابع المعدوم، نجد من استمرار هذا الأخير جوارً V من U بحيث لا ينعدم التابع f في هذا الجوار. هذا يقتضي أنّ التابع g معدوم على V استنادًا إلى الشرط $fg \equiv 0$ ، وبالتالي g يطابق التابع المعدوم على المفتوح المترابط U عملاً بنظريّة التمديد التحليلي.

$\Leftarrow$)

لنفترض أنّ $\vartheta(U)$ حلقة تامّة. ولنفترض بالخلف أنّ المفتوح U ليس مترابط، ولنفترض دونما إنقاص من عموميّة البرهان أنّ لـ U مركبتين مترابطتين أعظميتين Ω_1 و Ω_2، أي $U = \Omega_1 \cup \Omega_2$. في هذه الحالة نعتبر التابعين:

$$z \overset{f}{\mapsto} \begin{cases} 1; & z \in \Omega_1 \\ 0; & z \in \Omega_2 \end{cases} \qquad z \overset{g}{\mapsto} \begin{cases} 0; & z \in \Omega_1 \\ 1; & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

إنّ التابعين f و g تحليليين على U إذ هما كذلك محليًّا، كما أنهما يحققان الشرط $fg \equiv 0$ ، في حين كل منهما يختلف عن التابع المعدوم. إنّ هذا يتعارض مع كون $\vartheta(U)$ حلقة تامّة، إذن U مترابط من $\mathbb{C}$.

التمرين 4

ليكن U مفتوح مترابط من $\mathbb{C}$ يحوي الصفر. وليكن $f: U \to \mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا، ولنفترض أنّ f يختلف عن التابع المعدوم وأنّه يحقّق الشرط:

$$\forall (z,w) \in U^2, \quad z + w \in U \Rightarrow f(z+w) = f(z) f(w)$$

أثبت صحة ما يلي:

$$\exists b \in \mathbb{C} : \forall z \in U, \quad f(z) = \exp(bz).$$

(إرشاد: أحسب قيمة $f(0)$ وضع $b = f'(0)$).

حل التمرين 4

لنثبت في البداية أنّ الحل التحليلي الوحيد $g: U \to \mathbb{C}$ لمسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} g' = bg \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad / \, b \in \mathbb{C}$$

هو التابع $z \mapsto g(z) = \exp(bz)$.

وبالفعل، يوجد مجال مفتوح I من $U \cap \mathbb{R}$ يحوي 0. ولنعتبر التابع التحليلي:

$$h: I \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto h(x) = \exp(bx)$$

إذن، حسب مبرهنة في الدرس يقبل التابع h التمديد إلى تابع تحليلي $\tilde{h}$ على مفتوح مترابط $\mathcal{D}$ من $\mathbb{C}$ يحوي I.

بوضع $\mathcal{A} = U \cap \mathcal{D}$، يكون $\mathcal{A}$ مفتوحًا مترابطًا من U ويحوي I. كما نلاحظ أنّ مقصور g (في حال وجوده) على I يتطابق مع h (هذا معلوم مما تدرسه في المعادلات التفاضليّة)

إذن يتطابق التابع g مع المقصور $\tilde{h}_{|A}$ على A بناءً على نظريّة التّمديد التحليلي، ومن ثمّ يتطابق التابع g مع التابع $U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(bz)$ بناءً على نفس النظريّة. وهذا هو المطلوب.

لنعد الآن لحل التّمرين:

لمّا كان التابع f يختلف عن التابع المعدوم وجدنا عددًا z_0 من U بحيث $f(z_0) \neq 0$. وعليه يكون:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= f(z_0+0) \\ &= f(z_0)f(0) \end{aligned}$$

أي أنّ $f(z_0)(1-f(0))=0$. هذا يقتضي أنّ $f(0)=1$ لكون $\mathbb{C}$ حقلاً.

من جهة أخرى، نجد من أجل كل عنصر z من U ما يلي:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{|w|\to 0} \frac{f(z+w)-f(z)}{w} \\ &= \lim_{|w|\to 0} \frac{f(z)f(w)-f(z)}{w} \\ &= f(z)\cdot \lim_{|w|\to 0} \frac{f(w)-1}{w} \\ &= f(z)\cdot \lim_{|w|\to 0} \frac{f(w)-f(0)}{w-0} \\ &= f(z)f'(0) \end{aligned}$$

بوضع $b=f'(0)$. نرى بجلاء أنّ f هو الحل التحليلي الوحيد لمسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} f' = bf \\ f(0)=1 \end{cases}$$

وبالاعتماد على العمل الذي افتتحنا به هذا التّمرين، نجد أنّ f يحقّق المطلوب.

التّمرين 5

لتكن Ω مجموعة مفتوحة مترابطة من $\mathbb{C}$. وليكن $f:\Omega \to \mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا غير معدوم، ولنفترض أنّه يحقّق الشرط:

$$\forall z \in \Omega, \quad f'(z) = \left(f(z)\right)^2$$

المطلوب:

1) أثبت أنّ التابع f لا ينعدم على Ω.

2) عين التابع f.

حل التمرين 5

1) لنفترض جدلاً أنّ التابع f ينعدم عند عنصر z_0 من Ω. بوضع $g = f' = f \times f$ يكون التابع g تحليليًّا على Ω، وبالتالي يقبل الاشتقاق عددًا لا نهائيًّا من المرات. وتعطى مشتقاته بالعلاقة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} f^{(n-k)}$$

(علاقة $Leibniz$)

وبملاحظة أنّ $f(z_0)=0$ و $f'(z_0)=f^2(z_0)=0$ يكون $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(z_0)=0$ ومن ثمّ يكون g هو التابع المعدوم استنادًا إلى نظريّة التمديد التحليلي، وبالرجوع إلى العلاقة $g = f' = f \times f$ نرى بأنّ $f \equiv 0$ ، وهذا يتناقض مع كون f يختلف عن التابع المعدوم. إذن، التابع f لا ينعدم على Ω.

2) أخيرًا، نرى بسهولة أنّ f حلٌّ للمعادلة التفاضليّة $f' = f^2$ وهي معادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى، حلها بسيط. وهو يساوي:

$$\Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \frac{1}{a-z} \quad / \, a \notin \Omega.$$

التمرين 6

لتكن U مجموعة مفتوحة ومترابطة من $\mathbb{C}^*$. وليكن z_0 عنصرًا من U، وأخيرًا ليكن $f: U \to \mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا يحقّق الشرط:

$$\begin{cases} f'(z) = \dfrac{1}{z} \\ \exp\left(f(z_0)\right) = z_0 \end{cases}$$

برهن أنّ التابع f تعيين مستمرٌّ للوغاريتم على U.

حل التمرين 6

من الواضح أنّ التابع f مستمرٌّ على U كتابع تحليلي على U. لنعرِّف التابع التحليلي:

$$U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) = \exp(f(z)) - z$$

نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned} g(z_0) &= \exp(f(z_0)) - z_0 = 0 \\ g'(z_0) &= f'(z_0) \cdot \exp(f(z_0)) - 1 \\ &= \frac{1}{z_0} \cdot z_0 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالتدريج على n، نجد $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(z_0) = 0$ وعليه التابع g يطابق التابع المعدوم على U استنادًا إلى نظريّة التمديد التحليلي. وينتج عن ذلك أنّ:

$$\forall z \in U, \quad \exp(f(z)) = z$$

ومنه f تعيين مستمرٌّ للوغاريتم على U.

التمرين 7

نذكِّر بأنّ j يرمز للعدد العقدي $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. ولنضع:

$$\mathcal{D}_k = \{ t j^k : \quad t \in]-\infty, 1] \}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

وليكن $U = \mathbb{C} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$.

1) هل التابع $U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = Log\left(\sqrt{z^3 - 1}\right)$ معرّف جيدًا ؟.

2) احسب $f(i)$.

حل التمرين 7

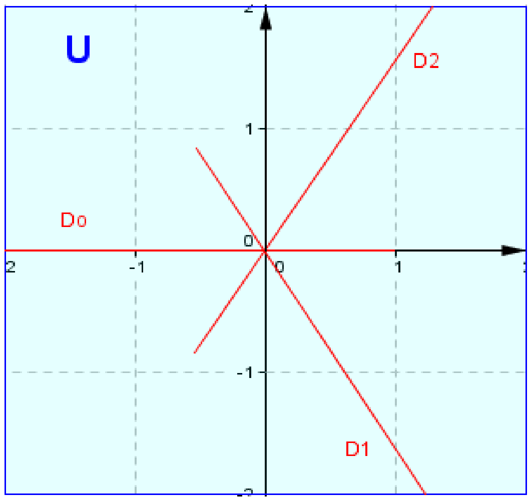
1) يمكن كتابة f بالشكل المساعد الآتي:

$$U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = Log\left(\exp\left(\frac{1}{2} Log(z^3 - 1)\right)\right)$$

باعتبار التابع $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = z^3 - 1$ يكون $f = Log \circ \exp \circ h_{\frac{1}{2}} \circ Log \circ g_{|U}$.

ومن ثمّ يكون f معرّفًا جيدًا إذا وفقط إذا كان $g(U)\subseteq U_\pi$.

في البداية لنتأمل شكل المجموعة U الذي نوضحه هنا في الأسفل:



السؤال المطروح هو: ما هي قيم z من $\mathbb{C}$ التي تجعل $g(z)=z^3-1$ ينتمي إلى $\mathbb{R}_-$؟.

من أجل الإجابة عن هذا السؤال نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}
g^{-1}(\mathbb{R}_-) &= \left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad z^3-1\in\mathbb{R}_-\right\}\\
&= \left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad z^3\in\left]-\infty,1\right]\right\}\\
&= \left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad z^3\in\mathbb{R}_-\right\}\cup\left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad z^3\in[0,1]\right\}\\
&= \left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad \left(e^{i3\theta}=-1\right)\wedge\left(|z|\in\mathbb{R}_+\right)\right\}\cup\left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad \left(e^{i3\theta}=1\right)\wedge\left(|z|\in[0,1]\right)\right\}\\
&= \left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad \left(\theta\in\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\right\}\right)\wedge\left(|z|\in\mathbb{R}_+\right)\right\}\cup\\
&\qquad \cup\left\{z=|z|e^{i\theta}:\quad \left(\theta\in\left\{\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\right\}\right)\wedge\left(|z|\in[0,1]\right)\right\}\\
&= \left\{|z|e^{i\frac{\pi}{3}},\ -|z|,\ |z|e^{i\frac{5\pi}{3}}\ /\ |z|\in\mathbb{R}_+\right\}\cup\left\{|z|\,j^k\ /\left(k\in\{0,1,2\}\right)\wedge\left(|z|\in[0,1]\right)\right\}\\
&= \mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2
\end{aligned}$$

وبالتالي $g(U)\subseteq U_\pi$. إذن f معرّف جيدًا.

2) لنحسب الآن $f(i)$ وهذا ممكن لأنّ العدد i ينتمي إلى U. لدينا:

$$
\begin{aligned}
f(i) &= Log\left(\exp\left(\frac{1}{2}Log(-i-1)\right)\right)\\
&= Log\left(\exp\left(\frac{1}{2}Log\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{-3\pi}{4}}\right)\right)\right)\\
&= Log\left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{2}-i\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&= Log\left(\exp\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)e^{i-\frac{3\pi}{8}}\right)\\
&= \frac{1}{4}\ln 2 - i\frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$

التمرين 8

لنذكّر بالترميز التالي:

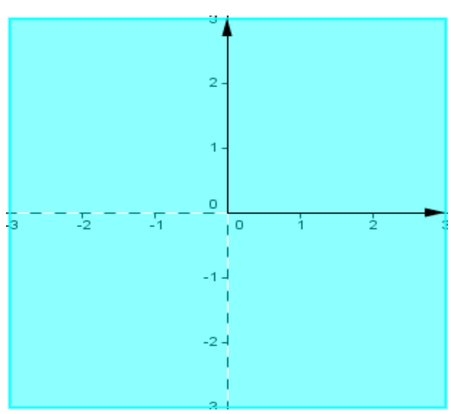
$$U_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \quad \theta \notin \arg(z)\}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

1) ارسم $U_\pi \cap U_{-\frac{\pi}{2}}$ في المستوي العقدي.

2) جد تابعين تحليليين f و g على U_π و $U_{-\frac{\pi}{2}}$ على التوالي، بحيث يتطابقان على جزء مفتوح Ω_1 من $U_\pi \cap U_{-\frac{\pi}{2}}$ ويختلفان على جزء مفتوح آخر Ω_2 من $U_\pi \cap U_{-\frac{\pi}{2}}$.

حل التمرين 8

1) إليك رسم $U_\pi \cap U_{-\frac{\pi}{2}}$ في المستوي العقدي:



2) نلاحظ أنّ $U_{\pi}\cap U_{-\frac{\pi}{2}}$ جزء مفتوح غير مترابط من $\mathbb{C}^{*}$ وله مركبتين مترابطتين أعظميتين. لنعتبر Ω_1 المركبة المترابطة الأعظميّة من $U_{\pi}\cap U_{-\frac{\pi}{2}}$ التي تقع في الربع الثالث من المستوي العقدي بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة)، ولنعتبر Ω_2 المركبة الأعظميّة الأخرى لـ $U_{\pi}\cap U_{-\frac{\pi}{2}}$؛ أي $\Omega_2=\left(U_{\pi}\cap U_{-\frac{\pi}{2}}\right)\setminus\Omega_1$. ولنتأمّل التابعين:

$$f:U_{\pi}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto Log(z)$$

$$g:U_{-\frac{\pi}{2}}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto Log\left(z e^{i\left(\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}-\pi\right)$$

إنّ التابعين f و g تحليليين لأنّهما تعيينين مستمرّين للوغاريتم، وكلٌّ منهما يكون تعيينًا مستمرًّا للوغاريتم على المجموعة المفتوحة والمترابطة Ω_1 من $\mathbb{C}^{*}$. وبملاحظة أنّهما يأخذان نفس القيمة عند العنصر $z_0=-i-1$ من Ω_1، إذْ لدينا:

$$f(-i-1)=Log\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{-3\pi}{4}}\right)=\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{3\pi}{4}$$

$$g(-i-1)=Log\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{-3\pi}{4}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)-i\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{3\pi}{4}$$

استنتجنا أنهما يتطابقان على الجزء المفتوح Ω_1 من $U_{\pi}\cap U_{-\frac{\pi}{2}}$. وأخيرًا، نتأكد من أنّ هذان التابعان يلبيان مطلوب التمرين بملاحظ أنّ $f(\Omega_2)\cap g(\Omega_2)=\phi$ ، لكون:

$$f(\Omega_2)=\left\{x+iy:\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right[\right\}$$

$$g(\Omega_2)=\left\{x+iy:\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\left]-\frac{5\pi}{2},-\pi\right[\right\}$$

التمرين 9

ليكن z و w عنصرين من U_{π} بحيث يكون جداؤهما zw عنصرًا من U_{π}.

1) أحسب قيمة العدد:

$$Log(zw)-Log(z)-Log(w)$$

2) ماذا تستنتج ؟

حل التمرين 9

1) لدينا:

$$
\begin{aligned}
&Log(zw)-Log(z)-Log(w)\\
&=\ln|zw|+iArg(zw)-\ln|z|-iArg(z)-\ln|w|-iArg(w)\\
&=\ln(|z||w|)-(\ln|z|+\ln|w|)+i(Arg(zw)-Arg(z)-Arg(w))\\
&=i(Arg(zw)-Arg(z)-Arg(w))
\end{aligned}
$$

2) الاستنتاج: بما أنّ $Arg(z)+Arg(w)$ لا ينتمي إلى المجال $]-\pi,\pi[$ عمومًا، فإنّ $Arg(zw)\neq Arg(z)+Arg(w)$ عمومًا، وبالتالي $Log(zw)\neq Log(z)+Log(w)$ عمومًا. وبالتحديد لدينا:

$$
\begin{gathered}
Log(zw)=Log(z)+Log(w)\\
\Updownarrow\\
Arg(zw)=Arg(z)+Arg(w)\\
\Updownarrow\\
Arg(z)+Arg(w)\in\,]-\pi,\pi[
\end{gathered}
$$

التمرين 10

ليكن z من $\mathbb{C}$. علمًا أنّ $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ و $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

1) تأكّد أنّ التابعين $z\mapsto\cos z$ و $z\mapsto\sin z$ هما الامتداد التحليلي إلى $\mathbb{C}$ للتابعين $\cos$ و $\sin$ ذات المتغير الحقيقي على الترتيب.

2) أثبت صحّة العلاقة التالية:

$$\forall(z,w)\in\mathbb{C}^2,\quad \cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$$

معتمدًا على صحتها في $\mathbb{R}^2$.

3) ماذا تستنتج ؟

حل التمرين 10

1) إنّ التابعين $z \mapsto \cos z$ و $z \mapsto \sin z$ تحليليين على $\mathbb{C}$ كمجموع تابعين تحليليين كما أنّ مقصوريهما على $\mathbb{R}$ هما التابعين الحقيقيين المألوفين $\cos$ و $\sin$ على التوالي. وهذا واضحٌ انطلاقًا من علاقة أولر المشهورة.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(علاقة أولر)

2) ليكن w من $\mathbb{C}$، ولنتأمّل التابع $f_W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرّف كما يلي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_W(z) = \cos(z+w) - \cos(z)\cos(w) + \sin(z)\sin(w)$$

التابع f_W تحليلي كمجموع وجداء توابع تحليليّة.

- في حالة w من $\mathbb{R}$: يطابق التابع f_W التابع المعدوم على $\mathbb{R}$، وعليه يكون f_W هو التابع المعدوم عملاً بنظريّة التمديد التحليلي. إذن:

$$\forall (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \quad (*)$$

- في حالة w من $\mathbb{C}$: يطابق التابع f_W التابع المعدوم على $\mathbb{R}$ اعتمادًا على العلاقة $(*)$، ومن ثمّ f_W هو التابع المعدوم بناءً على نظريّة التمديد التحليلي. وبالتالي:

$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2, \quad \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

وهي العلاقة المطلوبة.

3) الاستنتاج: بما أنّ التوابع المألوفة: $\exp$، $\cos$، $\sin$، ch، sh، $\tan$، th، cotan، coth ذات المتغيّر الحقيقي تُمَدَّدْ تحليليًّا إلى الساحة العقديّة $\mathbb{C}$، فإنّ جميع العلاقات المألوفة التي تحقّقها هذه التوابع فيما بينها في $\mathbb{R}$، تظلُّ صحيحةً في $\mathbb{C}$. ويبرهن على صحتها بشكل مشابه للطريقة التي اعتمدناها في إثبات السؤال السابق، وذلك باستخدام نظريّة التمديد التحليلي.

التمرين 11 . ـ نظريّة التابع المفتوح ـ

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$، وليكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$ تابعًا عقديًّا. نقول عن f أنّه تابع مفتوح، إذا وفقط إذا كانت صورة كل مفتوح $\mathcal{O}$ من Ω مفتوحًا في $\mathbb{C}$.

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أنّه إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة ومترابطة من $\mathbb{C}$، وكان $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا غير ثابت، كان f تابعًا مفتوحًا. من أجل ذلك نستعمل البرهان بالخلف كمايلي:

ليكن $\mathcal{O}$ مفتوحًا غير خالٍ من Ω، ولنفترض جدلاً أنّ $f(\mathcal{O})$ ليس مفتوحًا من $\mathbb{C}$.

1) أثبت أنّ:

$$\exists x\in\mathcal{O},\exists(a_n)_n\subset\mathbb{C}\setminus f(\mathcal{O}):\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=f(x)$$

2) أثبت أنّ:

$$\exists r_0>0,\exists\varepsilon>0:\quad \overline{D}(x,r_0)\subset\mathcal{O},\quad z\in\overline{D}(x,r_0)\Rightarrow|f(z)-f(x)|\geq\varepsilon$$

ثمّ استنتج أنّ:

$$\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq n_0\Rightarrow|a_n-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

3) لنعرِّف متتالية التوابع $(g_n)_n$ من $\mathcal{F}(\mathcal{O},\mathbb{C})$ بالشكل التالي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathcal{O},\quad g_n(z)=\frac{1}{f(z)-a_n}$$

أثبت أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |g_n(x)|\leq\sup_{z\in\partial\mathcal{D}}|g_n(z)|\quad /\,\mathcal{D}=\overline{D}(x,r_0)$$

ثمّ استنتج وُجود متتالية $(z_n)_n$ من $\partial\mathcal{D}$ تحقّق:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |g_n(x)|\leq|g_n(z_n)|=\sup_{z\in\partial\mathcal{D}}|g_n(z)|$$

4) أثبت أنّ:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |f(z_n)-a_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}$$

ثمّ استنتج أنّ:

$$\forall n\geq n_0,\quad \frac{1}{|f(x)-a_n|}\leq\frac{1}{|f(z_n)-a_n|}\leq\frac{2}{\varepsilon}$$

5) لماذا لدينا تناقض؟

حل التمرين 11

1) يوجد عنصر x من $\mathcal{O}$ بحيث:

$$\forall r>0, \quad D\left(f(x),r\right)\not\subset f(\mathcal{O})$$
$$\forall r>0, \quad D\left(f(x),r\right)\cap\left(\mathbb{C}\setminus f(\mathcal{O})\right)\neq\phi$$

أي أنّ $f(x)$ نقطة ملاصقة لـ $\mathbb{C}\setminus f(\mathcal{O})$، وبالتالي:

$$\exists(a_n)_n\subset\mathbb{C}\setminus f(\mathcal{O}): \quad \lim_{n\to+\infty}a_n=f(x)$$

2) بما أنّ التابع f تحليلي، فإنّ التابع $z\mapsto f(z)-f(x)$ تحليلي. وبما أنّ التابع f غير ثابت، فإنّ التابع $z\mapsto f(z)-f(x)$ يختلف عن التابع المعدوم، وبالتالي أصفاره معزولة. ولمّا كان x أحد أصفاره، كان هذا الأخير معزولاً. إذن، نجد قرصًا مغلقًا $\overline{D}(x,r_0)$ محتوى في $\mathcal{O}$، بحيث يكون x هو الصفر الوحيد للتابع $z\mapsto f(z)-f(x)$ على هذا القرص المغلق. وعليه يوجد عدد حقيقي موجب تمامًا ε بحيث:

$$\forall z\in\overline{D}(x,r_0), \quad \left|f(z)-f(x)\right|\geq\varepsilon$$

ولمّا كانت المتتالية $(a_n)_n$ تتقارب نحو $f(x)$، وجدنا عددًا طبيعيًا $n_0(\varepsilon)$ بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq n_0\Rightarrow\left|a_n-f(x)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

3) إنّ التوابع g_n تحليليّة، كتوابع كسريّة بمقام لا ينعدم وبسط ومقام تحليليين.
بتطبيق مبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 2) على التوابع g_n، نجد:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \left|g_n(x)\right|\leq\sup_{z\in\partial\mathcal{D}}\left|g_n(z)\right| \quad / \, \mathcal{D}=\overline{D}(x,r_0)$$

ولمّا كان التابع $z\mapsto\left|g_n(z)\right|$ مستمرًّا على المتراص $\mathcal{D}=\overline{D}(x,r_0)$، فهو يدرك حدّه الأعلى عند عنصر z_n من $\partial\mathcal{D}$. إذن توجد متتالية $(z_n)_n$ من $\partial\mathcal{D}$ تحقّق:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \left|g_n(x)\right|\leq\left|g_n(z_n)\right|=\sup_{z\in\partial\mathcal{D}}\left|g_n(z)\right|$$

4) لدينا:

$$\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\\ &\quad \left|f(z_n)-a_n\right|=\left|f(z_n)-f(x)+f(x)-a_n\right|\\ &\qquad\qquad\geq\left|f(z_n)-f(x)\right|-\left|f(x)-a_n\right|\geq\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\forall n \geq n_0,$$
$$\frac{1}{|f(x)-a_n|}=|g_n(x)| \leq |g_n(z_n)| = \frac{1}{|f(z_n)-a_n|} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

5) بالاستفادة من العلاقة $(*)$ والمتراجحة الأخيرة نجد:

$$\forall n \geq n_0,$$
$$\frac{2}{\varepsilon} \leq \frac{1}{|f(x)-a_n|}=|g_n(x)| \leq |g_n(z_n)| = \frac{1}{|f(z_n)-a_n|} \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

أي أنّ:

$$\forall n \geq n_0, \quad |g_n(x)| = |g_n(z_n)| = \sup_{z \in \partial \mathcal{D}} |g_n(z)|$$

وبالتالي يكون التابع g_n ثابتًا أيًا كان $n_0 \leq n$ بناءً على مبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 2)، ومن ثمّ يكون f ثابتًا على المفتوح $\mathcal{O}$، وبالاعتماد على نظريّة التمديد التحليلي يكون f ثابتًا على المفتوح المترابط Ω. وهذا يتناقض والفرْض.

التمرين 12

ليكن U مفتوحًا مترابطًا من $\mathbb{C}$، وليكن $f:U \to \mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا. لنفترض أنّ f غير ثابت وأنّه يحقِّق الشرط $f(U) \subset U$ مع $f \circ f = f$.

1) اشرح لماذا $f(U)$ هو مفتوح ومترابط من U.

2) استنتج أنّ $f = Id$.

حل التمرين 12

1) f تحليلي غير ثابت على المفتوح المترابط U. إذن f تابع مفتوح، وبالتالي $f(U)$ مفتوح من U. ولمّا كان U مترابطًا و f تابعًا مستمرًّا كتابع تحليلي، كان $f(U)$ مترابطًا من U.

2) لدينا $f_{|f(U)} = Id_{|f(U)}$ وبالاعتماد على نظريّة التمديد التحليلي نجد $f = Id$.

التمرين 13

ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعًا تحليليًّا بحيث $f\circ f=\exp$.

1) أثبت أنّ $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$.

2) علمًا أنّه يوجد تابع تحليلي $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ يحقِّق $\exp\circ g=f$. أثبت أنّ التابع $g\circ f-Id$ ثابت.

3) ماذا تستنتج ؟

حل التمرين 13

1) لدينا $\mathbb{C}^*=f\left(f(\mathbb{C})\right)\subset f(\mathbb{C})$. فلو افترضنا أنّ $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ لكان:

$$\mathbb{C}=f\left(f(\mathbb{C})\right)=\exp(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$$

وهذا عين التناقض. إذن $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$.

2) اعتمادًا على المساواة $\exp\circ g=f$ يكون:

$$\exp\circ g\circ f=f\circ f=\exp$$

وبالتالي يوجد تابع صحيح $\lambda:\mathbb{C}\to\mathbb{Z}$ بحيث $g\circ f=Id+2\pi i\lambda$ ، ومن ثمّ يكون λ تحليليًّا على $\mathbb{C}$. إذن $\lambda(\mathbb{C})$ مترابطة من استمرار λ ، وعليه λ تابع ثابت. ومنه $g\circ f-Id=2\pi i\lambda$ تابع ثابت.

3) لمّا كان التابع $g\circ f=Id+2\pi i\lambda$ متباينًا، كان f كذلك. وهذا يقتضي تباين التابع $\exp=f\circ f$ ، وهذا تناقض. إذن لا يمكن لـ f أن يحقِّق العلاقة $f\circ f=\exp$.

التمرين 14

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. لنعرِّف المؤثرين التفاضليين:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

1) باعتبار $f=P+iQ$ ، أكتب معادلات كوشي ـ ريمان $(C-R)$ في الإحداثيات القطبيّة.

2) تأكّد من صحّة العلاقة التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$$

3) أكتب معادلات كوشي - ريمان بدلالة المؤثرين التفاضليين $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

4) نذكّر بمؤثر لابلاص التفاضلي $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. عبر عن Δ بدلالة المؤثرين التفاضليين $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

5) أحسب $\Delta\left(|f|^2\right)$.

تطبيق:

أ) أوجد تابعًا $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ يحقِّق الشرط $f'(0)=0$ وتكون مجموعة النقاط التي يحقِّق فيها معادلات $C-R$ هي $\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \ |z|=1\}$.

ب) أدرس هولومورفيّة التوابع التالية في $\mathbb{C}$:

$$f(x+iy) = x + y + ixy$$

$$z \mapsto g(z) = |z|$$

$$z \mapsto h(z) = \frac{z}{\pi - 3}$$

جـ) أوجد التابع $Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بحيث $f = P + iQ$ تابع هولومورفي على $\mathbb{C}$ ويحقّق الشرطين:

$$P(x,y) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0$$

د) لنعتبر الجملة $(f_k)_{1 \le k \le n}$ من التوابع الهولومورفيّة على $\mathbb{C}$ بحيث التابع $\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2$ ثابت على $\mathbb{C}$. أثبت أنّ التابع f_k ثابت أيًا كان k من $\{1, \ldots, n\}$.

حل التمرين 14

1) لنذكّر أوّلاً بقانون الاشتقاق الجزئي التالي:

لنعتبر التابع $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) = f(u,v)$ بحيث:

$$u = f_1(x,y), \qquad v = f_2(x,y)$$

ولنفترض أنّ التابعين f_1 و f_2 من الصف $\mathcal{C}^1$، وأنّ التابع $(u,v)\mapsto f(u,v)$ من الصف $\mathcal{C}^1$ على $f_1(\mathbb{R}^2)\times f_2(\mathbb{R}^2)$. عندئذ يكون F من الصف $\mathcal{C}^1$. ويكون:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

لإيجاد صيغة معادلات كوشي - ريمان في الإحداثيات القطبيّة نطبِّق القانون السابق على التابعين التاليين:

$$(x,y)\mapsto P(x,y)=p(r,\theta)\qquad / \, r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(x,y)\mapsto Q(x,y)=q(r,\theta)\qquad / \, \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

لكن لا ننصحك بذلك بسبب تعقيدات الحساب، وإنّما نطبِّقه على التابعين:

$$(r,\theta)\mapsto P(r,\theta)=p(x,y)\qquad / \, x=r\cos\theta$$
$$(r,\theta)\mapsto Q(r,\theta)=q(x,y)\qquad / \, y=r\sin\theta$$

فنجد:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial p}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial \theta}=\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial p}{\partial y}\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial r}=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial q}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial q}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial \theta}=\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial q}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial q}{\partial y}\end{cases}$$

بالاستفادة من دساتير كوشي - ريمان:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial q}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y}=-\dfrac{\partial q}{\partial x}\end{cases}$$

نجد الصيغة المطلوبة:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}\end{cases}$$

2) لدينا:

$$\overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}=\overline{\frac{\partial P-iQ}{\partial z}}$$
$$=\overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P-iQ}{\partial x}-i\frac{\partial P-iQ}{\partial y}\right)}$$
$$=\overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial Q}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial y}\right)\quad (*)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P+iQ}{\partial x}+i\frac{\partial P+iQ}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

3) نلاحظ من الخطوة $(*)$ من سلسلة المطابقات السابقة أنّ:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\equiv 0 \Leftrightarrow f$$ يُحقّق شرطا $(C-R)$

4) لدينا:

$$\Delta(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ:

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \overline{z}}=4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta(f)$$

لأنّ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ وهذا راجع لكون التابع f ، بصفته تابع لمتغيرين ينتمي إلى الصف C^∞ إذ هو تابع هولومورفي.

5) لدينا:

$$\Delta\left(|f|^2\right)=4\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial \overline{z}\partial z}=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial |f|^2}{\partial z}\right)$$

وبملاحظة أنّ:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial z}=\frac{\partial f\,\overline{f}}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+\underbrace{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}_{=0}f=f'\cdot\overline{f}$$

أي:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial |f|^2}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(f'\cdot \bar{f}\right)=\underbrace{\frac{\partial f'}{\partial \bar{z}}}_{=0}\bar{f}+\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}f'=\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}f'=\overline{f'}f'=|f'|^2$$

وبالتالي:

$$\Delta\left(|f|^2\right)=4|f'|^2$$

حل التطبيق

أ) بما أنّ $|z|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1$ نستنتج أنّ:

$$z\left(z\bar{z}-1\right)=0\Leftrightarrow z\in\{0\}\cup\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

إذن يكفي اختيار التابع f بحيث:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)=z\left(z\bar{z}-1\right)=z^2\bar{z}-z$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ $\bar{z}$ مع اعتبار الشرط $f'(0)=0$ ، نجد:

$$f(z)=\frac{1}{2}z^2\bar{z}^2-z\bar{z}+g(z)\quad / \,g'(0)=0,\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}=0$$

ومنه يكفي اختيار التابع التالي:

$$\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto f(z)=\frac{1}{2}z^2\bar{z}^2-z\bar{z}.$$

ب)

1. بوضع $f=P+iQ$ نلاحظ أنّ:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0,0)=1\neq 0=\frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)$$

أي أنّ التابع f لا يحقِّق شرطا كوشي ـ ريمان عند الصفر، وبالتالي التابع f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر. ومنه f ليس تابع هولومورفي على $\mathbb{C}$.

2. بوضع $g=P+iQ$ نلاحظ بشكل مماثل أنّ:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(1,0)=1\neq 0=\frac{\partial Q}{\partial y}(1,0)$$

وبالتالي التابع g لا يقبل الاشتقاق عند العدد 1. ومنه g ليس تابع هولومورفي على $\mathbb{C}$.

3. التابع h هولومورفي على $\mathbb{C}$ ككثير حدود من $\mathbb{C}[Z]$.

جـ) اعتمادًا على الشرط الأوّل لكوشي - ريمان، نرى أنّ:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)=2x+y=\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ y، نجد:

$$Q(x,y)=2xy+\frac{1}{2}y^2+C(x)$$

واعتمادًا على الشرط الثاني لكوشي - ريمان، يكون:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2y+C'(x)=2y-x=-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

إذن يكون $C(x)=-x+c$، ومن الشرط $f(0)=0$ نجد $c=0$. ومنه التابع المطلوب هو:

$$(x,y)\mapsto Q(x,y)=2xy+\frac{1}{2}y^2-x.$$

د) بما أنّ التابع $\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2$ ثابت، فإنّ $\Delta\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2\right)\equiv 0$. وبما أنّ مؤثر لابلاص خطّي، فإنّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta\left(|f_k|^2\right)\equiv 0$$

هذا يقتضي أنّ $\left|f_k'\right|\equiv 0$ ،$\forall k\in\{1,\ldots,n\}$، وبالتالي $f_k'\equiv 0 \quad \forall k\in\{1,\ldots,n\},$

وبناءً على المبرهنة 3.5. ينتج المطلوب.

التمرين 15

لتكن U مجموعة مفتوحة مترابطة من $\mathbb{C}$، وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. أثبت صحّة التكافؤات التالية:

1) f ثابت $\Leftrightarrow$ $|f|$ ثابت.

2) f ثابت $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ ثابت.

3) استنتج قضيّة أكثر عموميّة.

حل التمرين 15

1) لزوم الشرط واضح، لنثبت كفاية الشرط. بوضع $f = P + iQ$ نجد عددًا حقيقيًا موجبًا M بحيث $P^2 + Q^2 \equiv M$. إذا كان $M = 0$ استنتجنا أنّ $f \equiv 0$، ومنه f ثابت.

لنفترض الآن أنّ $0 < M$. بالاشتقاق بالنسبة لـ x ثمّ بالنسبة لـ y نستنتج أنّ:

$$P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$$
$$P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$$

وبالاستفادة من شرطا كوشي - ريمان، نجد:

$$(*)\begin{cases} P\dfrac{\partial P}{\partial x} + Q\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0 \\ P\dfrac{\partial Q}{\partial x} - Q\dfrac{\partial P}{\partial x} \equiv 0 \end{cases}$$

ولمّا كان $f' = \dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ فإنّ الجملة $(*)$ تكافئ $\overline{f} f' \equiv 0$. وبما أنّ $M \neq 0$ فإنّ:

$$\forall z \in U, \quad f(z) \neq 0$$

وبالتالي الجملة $(*)$ تكافئ $f' \equiv 0$. ومنه f ثابت.

2) لنهتم بكفاية الشرط إذْ لزوم الشرط واضح. بوضع $f = P + iQ$ كالعادة، نجد بناءً على دساتير كوشي - ريمان أنّ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

فإذا كان $P = \operatorname{Re} f$ ثابتًا، استنتجنا أنّ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$. ومنه يكون Q ثابتًا.

وبالتالي التابع f ثابت.

3) يمكن إثبات أنّ: f ثابت $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f$ ثابت. وذلك باتباع أسلوب مماثل لما فعلنا في إثبات السؤال السابق. واعتمادًا على المبرهنة 3.5 نستنتج صحّة التكافؤات التالية:

f ثابت $\Leftrightarrow$ $|f|$ ثابت $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ ثابت $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f$ ثابت $\Leftrightarrow f' \equiv 0$.

التمرين 16

ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًا، ولنفترض أنّ $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$.

1) أثبت أنّ f ينعدم في $\mathbb{C}$ وأنّ عدد أصفاره منتهٍ.

2) استنتج أنّ f كثير حدود.

حل التمرين 16

1) لنفترض جدلاً أنّ f لا ينعدم في $\mathbb{C}$. نعرِّف عندئذ التابع الهولومورفي:

$$\begin{aligned} g:\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\ z\mapsto g(z)&=\frac{1}{f(z)}\end{aligned}$$

اعتمادًا على الشرط $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$، نرى أنّ التابع g محدود في $\mathbb{C}$ لما يلي:

$$\lim_{|z|\to+\infty}|g(z)|=\lim_{|z|\to+\infty}\frac{1}{|f(z)|}=0$$

وبالتالي g ثابت بناءً على مبرهنة ليوفيل. هذا يقتضي أنّ التابع f ثابت على $\mathbb{C}$ وهذا يتناقض والشرط $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$، ومنه f ينعدم في $\mathbb{C}$. واعتمادًا على نفس الشرط نرى بأنّ التابع التحليلي f يختلف عن التابع المعدوم، وبالتالي أصفاره معزولة بناءً على نظريّة الأصفار المعزولة. هذا يعني أنّ المجموعة $Z(f)$ عدودة (منتهية أو قابلة للعد). لنفترض جدلاً أنّها قابلة للعد. عندئذ نميّز حالتين:

- حالة $Z(f)$ قابلة للعد ومحدودة:

نجد إذن متتالية محدودة $(z_n)_n$ من $Z(f)$ قيمها مختلفة مثنى مثنى. وبالتالي يوجد تطبيق متزايد تمامًا $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بحيث تكون المتتالية الجزئيّة $\left(z_{\varphi(n)}\right)_n$ متقاربة نحو عنصر z من $\mathbb{C}$ بناءً على مبرهنة بولزانو ـ فيرشتراس. وعليه تكون z نقطة تراكم للمجموعة $\left\{z_{\varphi(n)}:n\in\mathbb{N}\right\}$، ومن ثمّ z نقطة تراكم للمجموعة $Z(f)$. وبملاحظة أنّ:

$$f(z)=f\left(\lim_{n\to+\infty}z_{\varphi(n)}\right)=\lim_{n\to+\infty}f\left(z_{\varphi(n)}\right)=0$$

أي z صفر للتابع f وهو نقطة تراكم للمجموعة $Z(f)$، نستنتج أنّ f يطابق التابع المعدوم وهذا يتناقض والشرط $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|f(z)|=+\infty$.

- حالة $Z(f)$ قابلة للعد وغير محدودة:

في هذه الحالة يكون:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in Z(f): \quad |z| > \varepsilon$$

وبالتالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in \mathbb{C}: \quad (|z| > \varepsilon) \wedge (|f(z)| = 0). \qquad (*)$$

من جهة أخرى نرى أنّ:

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$$

وهذا يناقض الشرط $(*)$.

إذن في كلا الحالتين نحصل على تناقض. ومنه $Z(f)$ ليست قابلة للعد. وبما أنّها عدودة فهي منتهية.

2) لنسلِّم بصحته؛ لأنّ جوابه يخرج عن الإطار النظري الذي قدمناه.

التمرين 17

ليكن $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ تابعًا مستمرًّا، ولنفترض أنّ f هولومورفي على القرص المفتوح $D(0,1)$. وأنّ التابع f معدوم على النصف العلوي لدائرة الوحدة؛ أي على المجموعة $\{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

المطلوب:

أثبت أنّ f هو التابع المعدوم.

حل التمرين 17

لنعتبر التابع $g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}, \quad g(z) = f(z) f(-z)$. من الواضح أنّ التابع g مستمرٌّ على القرص المغلق $\mathcal{D} = \overline{D}(0,1)$، كما أنّه هولومورفي على القرص المفتوح $D(0,1)$. وبملاحظة أنّ

التابع g معدوم على الحافة ∂D، فإنّ التطبيق المباشر لمبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 2) على التابع g يثبت أنّ التابع g هو التابع المعدوم. ولمّا كان $D(0,1)$ مفتوحًا ومترابطًا كانت الحلقة $\vartheta(D(0,1))$ تامّة. هذا يقتضي أنّ أحد التابعين التاليين، على الأقل:

$$D(0,1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$

$$D(0,1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(-z)$$

معدوم. ومن ثمّ في كلا الحالتين يكون مقصور التابع f على $D(0,1)$ هو التابع المعدوم. ولمّا كان f مستمرًّا على $\overline{D}(0,1)$ استنتجنا أنّ التابع f هو التابع المعدوم.

التمرين 18

ليكن $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا، ولنفترض أنّ f غير محدود. أثبت أنّ $f(\mathbb{C})$ كثيفة في $\mathbb{C}$.

حل التمرين 18

لنفترض جدلاً أنّ $f(\mathbb{C})$ ليست كثيفة في $\mathbb{C}$؛ أي $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$. نجد عندئذ عنصرًا z_0 من $\mathbb{C}$ بحيث z_0 لا تنتمي إلى $\overline{f(\mathbb{C})}$، ومن ثمّ نجد عددًا حقيقيًّا موجبًا تمامًا r_0 بحيث $D(z_0,r_0) \cap f(\mathbb{C}) = \phi$. ولنعرِّف التابع الهولومورفي التالي:

$$g:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0}$$

إنّ التابع g محدود في $\mathbb{C}$ لما يلي:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - z_0|} \le \frac{1}{r_0}$$

وبالتالي يكون f ثابتًا بناءً على نظريّة ليوفيل. وهذا يقتضي أنّ f ثابت. ومن ثمّ يتناقض مع كون f غير محدود. إذن المجموعة $f(\mathbb{C})$ كثيفة في $\mathbb{C}$.

التمرين 19

لتكن U مجموعة مفتوحة مترابطة من $\mathbb{C}$ وتحوي الصفر.

1) هل يوجد تابع $f:U\to\mathbb{C}$ هولومورفي ويحقِّق الشرط:

$$\forall z\in U,\quad |f(z)|=C+|z|^2 \quad / C\in\mathbb{R}_+^*$$

2) أوجد كافة التوابع f الهولومورفيّة على $\mathbb{C}$ والتي تحقِّق الشرط:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|=|z|^2$$

حل التمرين 19

1) لنفترض وجود تابع $f:U\to\mathbb{C}$ هولومورفي ويحقِّق الشرط المذكور. عندئذ يكون:

$$\forall z\in U,\quad |f(z)|\geq C>0$$

أي أنّ التابع f لا ينعدم على U. لنعرِّف التابع الهولومورفي:

$$g:U\to\mathbb{C},\quad z\mapsto g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}\forall z\in U,\quad |g(z)|&=\frac{1}{|f(z)|}\\&=\frac{1}{C+|z|^2}\\&\leq\frac{1}{C}=|g(0)|\end{aligned}$$

أي أنّ العنصر $z_0=0$ قيمة عظمى للتابع g. إذن التابع g ثابت استنادًا إلى مبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 1)، وبالتالي f ثابت. وهذا يتناقض وكون المقدار $|f(z)|=C+|z|^2$ غير ثابت (يتعلّق بـ z)، وبالتالي لا يوجد تابع هولومورفي على U ويحقِّق الشرط المعطى.

2) لنفترض وجود تابع $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ هولومورفي ويحقِّق الشرط:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|=|z|^2 \qquad (*)$$

عندئذ تكون:

$$\lim_{|z|\to+\infty}|f(z)|=\lim_{|z|\to+\infty}|z|^2=+\infty$$

وبالاعتماد على التمرين 16. يكون f كثير حدود. وبالعودة للشرط $(*)$ نرى بأنّ:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=\lambda z^2 \quad /\lambda\in S^1$$

وبالتالي مجموعة التوابع المطلوبة هي $\{z\mapsto \lambda z^2:\lambda\in S^1\}$.

التمرين 20

ليكن $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. ولنفترض وجود عنصر (A,B,C) من $(\mathbb{R}_+)^3$ بحيث:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|\le A+B|z|^C$$

1) أثبت أنّ f كثير حدود.

2) استنتج برهانًا آخرًا لنظريّة ليوفيل.

حل التمرين 20

1) توجد سلسلة صحيحة $\sum_{n\ge0}a_nz^n$ نصف قطر تقاربها يساوي $+\infty$ بحيث:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$

وبوضع $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$ أيًا كان r من $\mathbb{R}_+^*$. كان:

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n|\le\frac{M(r)}{r^n}$$

(متراجحات كوشي)

وعليه يكون:

$$\forall r>0,\forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n|\le\frac{A+Br^C}{r^n}=\frac{A}{r^n}+\frac{B}{r^{n-C}}$$

وبالسعي بـ r نحو $+\infty$ نجد:

$$\forall n\ge[C]+1,\quad a_n=0$$

ومنه $f(z)=\sum_{n=0}^{E(C)}a_nz^n$. أي f كثير حدود درجته أقل أوتساوي $E(C)=[C]$.

2) إذا كان $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا ومحدودًا وجدنا عددًا حقيقيًّا موجبًا تمامًا B بحيث:

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|\le B=B|z|^0$$

واعتمادًا على السؤال السابق نستنتج أنّ f كثير حدود يحقِّق $\deg(f)\le[0]=0$.
أي أنّ $f\equiv a_0$ تابع ثابت.

التمرين 21

لتكن Ω مجموعة مفتوحة مترابطة من $\mathbb{C}$، وليكن $f:\Omega\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا. لنفترض أنّ f غير ثابت وأنّه يقبل قيمة دنيا محليّة z_0 من Ω.

المطلوب:

أثبت أنّ $f(z_0)=0$.

حل التمرين 21

لنفترض جدلاً أنّ $f(z_0)\neq 0$. من استمرار f عند z_0 نجد قرصًا مفتوحًا $D(z_0,r)$ مركزه z_0 ونصف قطره r محتوى في Ω بحيث التابع f لا ينعدم على هذا القرص المفتوح. لنتأمّل التابع التالي:

$$g:D(z_0,r)\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

التابع g هولومورفي كمقلوب تابع هولومورفي لا ينعدم. وبملاحظة أنّ z_0 تكون قيمة محليّة عظمى للتابع g فإنّ التابع g يكون ثابتًا بناءً على مبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 1)، وبالتالي يكون f ثابتًا على القرص المفتوح $D(z_0,r)$، ومن ثمّ يكون f ثابتًا على المفتوح المترابط Ω استنادًا إلى نظريّة التمديد التحليلي. وهذا يتناقض وكون f غير ثابت ومنه $f(z_0)=0$.

التمرين 22

لتكن U مجموعة مفتوحة مترابطة محتواة تمامًا في $\mathbb{C}$. وليكن $f:U\to\mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا.
لنفترض أنّ التابع $\operatorname{Re} f$ يقبل قيمة عظمى (أو دنيا) محليّة z_0 من U. أثبت أنّ f ثابت.

حل التمرين 22

لنفترض أنّ التابع $\operatorname{Re} f$ يقبل قيمة عظمى محليّة z_0 من U. في هذه الحالة نعتبر التابع $g = \exp \circ f$ وهو تابع هولومورفي كتركيب تابعين هولومورفيين. بما أنّ z_0 قيمة عظمى محليّة لـ f نجد قرصًا مفتوحًا $D(z_0,r)$ مركزه z_0 ونصف قطره r محتوى في U بحيث:

$$\forall z \in D(z_0,r), \quad \operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(z_0)$$

ومن تزايد التابع الأسّي الحقيقيّ نجد:

$$\forall z \in D(z_0,r), \quad |g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^{\operatorname{Re} f(z_0)} = |g(z_0)|$$

أي أنّ z_0 قيمة عظمى محليّة للتابع g. وبالتالي يكون g ثابتًا استنادًا إلى مبدأ الطويلة العظمى (الصيغة 1) ومن ثمّ $|g|$ تابع ثابت. وهذا يقتضي أنّ $\operatorname{Re} f$ ثابت ومنه f ثابت.

وفي حالة z_0 قيمة دنيا محليّة للتابع $\operatorname{Re} f$ نعتبر التابع $g = \exp \circ (-f)$ وبتطبيق عمل مشابه لما فعلنا قبل قليل نجد أنّ f ثابت.

التمرين 23

ليكن $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ تابعًا هولومورفيًّا يحقِّقُ $f(0) = 1$ و $\operatorname{Re} f \geq 0$. ولنعرِّف التابع التالي:

$$g : D(0,1) \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$

1) أثبت أنّ $\operatorname{Re} f > 0$ على القرص المفتوح $D(0,1)$.

2) استنتج أنّ:

$$\forall z \in D(0,1), \quad |g(z)| \leq |z|$$

وأنّ:

$$\forall z \in D(0,1), \quad \frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

حل التمرين 23

1) إذا كان f ثابت فإنّ الشرط $f(0)=1$ يقتضي أنّ $f\equiv 1$، وبالتالي $\operatorname{Re} f\equiv 1>0$.

أمّا إذا كان f غير ثابت كان التابع f تابعًا مفتوحًا بناءً على نظريّة التابع المفتوح وبالتالي تكون $f\left(D(0,1)\right)\subseteq \overset{\circ}{\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z\geq 0\}}=\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z>0\}$ ومنه $\operatorname{Re} f>0$ على $D(0,1)$.

2) نلاحظ أنّ التابع g هولومورفي كتابع كسري ببسط هولومورفي ومقام هولومورفي لا ينعدم (من السؤال الأوّل). كما نلاحظ أيضًا، أنّ:

$$\operatorname{Re}(f-1)<\operatorname{Re}(f+1),\quad \operatorname{Im}(f-1)=\operatorname{Im}(f+1)$$

ومنه $|g|<1$. ولمّا كانت $g(0)=0$ استنتجنا استنادًا إلى مبرهنة شوارتز أنّ:

$$\forall z\in D(0,1),\quad |g(z)|\leq |z|$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
|g(z)|\leq |z| &\Rightarrow \frac{|f(z)-1|}{|f(z)+1|}\leq |z|\\
&\Rightarrow |f(z)-1|\leq |z||f(z)+1|\\
&\Rightarrow \left||f(z)|-1\right|\leq |z|\left(|f(z)|+1\right)\\
&\Rightarrow -|z|\left(|f(z)|+1\right)\leq |f(z)|-1\leq |z|\left(|f(z)|+1\right)\\
&\Rightarrow \frac{1-|z|}{1+|z|}\leq |f(z)|\leq \frac{1+|z|}{1-|z|}
\end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

ملحق

سنثبت في هذا الملحق أنّ "كلّ مجموعة من النقاط المعزولة من $\mathbb{C}$، هي مجموعة عدودة".

من أجل ذلك نثبت صحتها في المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ أولاً ثمّ نستنتج صحتها في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ تاليًا.

• لتكن A مجموعةً من النقاط المعزولة من $\mathbb{R}$. بما أنّ $\mathbb{R}$ حقلٌ مرتب، عرّفنا من أجل كل عنصر x من A المجال المفتوح:

$$I_x = \left]x, y\right[\quad / \, y \in A \wedge I_x \cap A = \phi$$

وفي حالة $I_x = \phi$ نضع بالتعريف $I_x = \left]x, +\infty\right[$ فنحصل على العائلة $(I_x)_{x\in A}$ المؤلفة من مجالات مفتوحة وغير خالية منفصلة مثنى مثنى من $\mathbb{R}$. من كثافة الأعداد الناطقة نعرّف من أجل كل عنصر x من A المجموعة غير الخالية $\mathcal{D}_x = \mathbb{Q} \cap I_x$. ولمّا كانت المجالات $(I_x)_{x\in A}$ منفصلة مثنى مثنى كانت المجموعات $(\mathcal{D}_x)_{x\in A}$ منفصلة مثنى مثنى. إذن بإرفاق كل عنصر x من A بعنصر وحيد d_x من المجموعة $\mathcal{D}_x$ نحصل على التطبيق المتباين التالي:

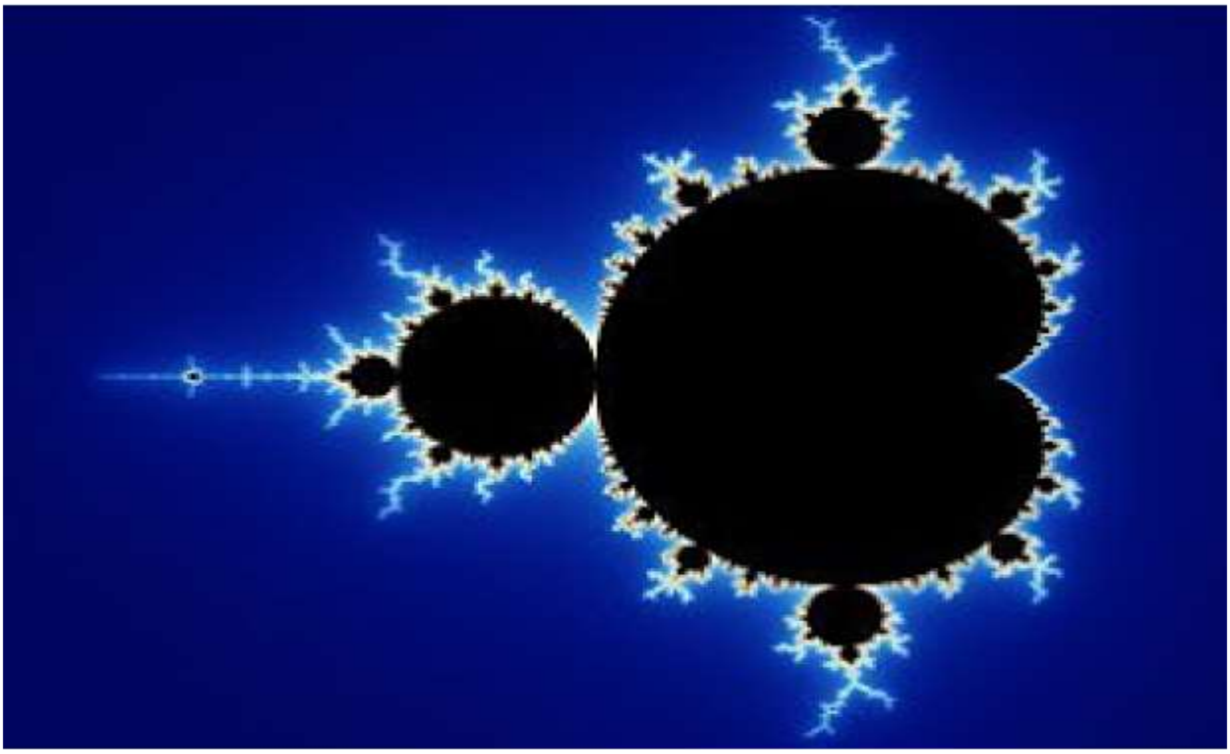
$$f : A \to \mathbb{Q}$$
$$x \mapsto f(x) = d_x$$

هذا يعني أنّ $card(A) \leq card(\mathbb{Q})$ ومنه A عدودة. (كما نشير إلى أنّ عمليّة الإرفاق السابقة تعرف بمسلمة الاختيار).

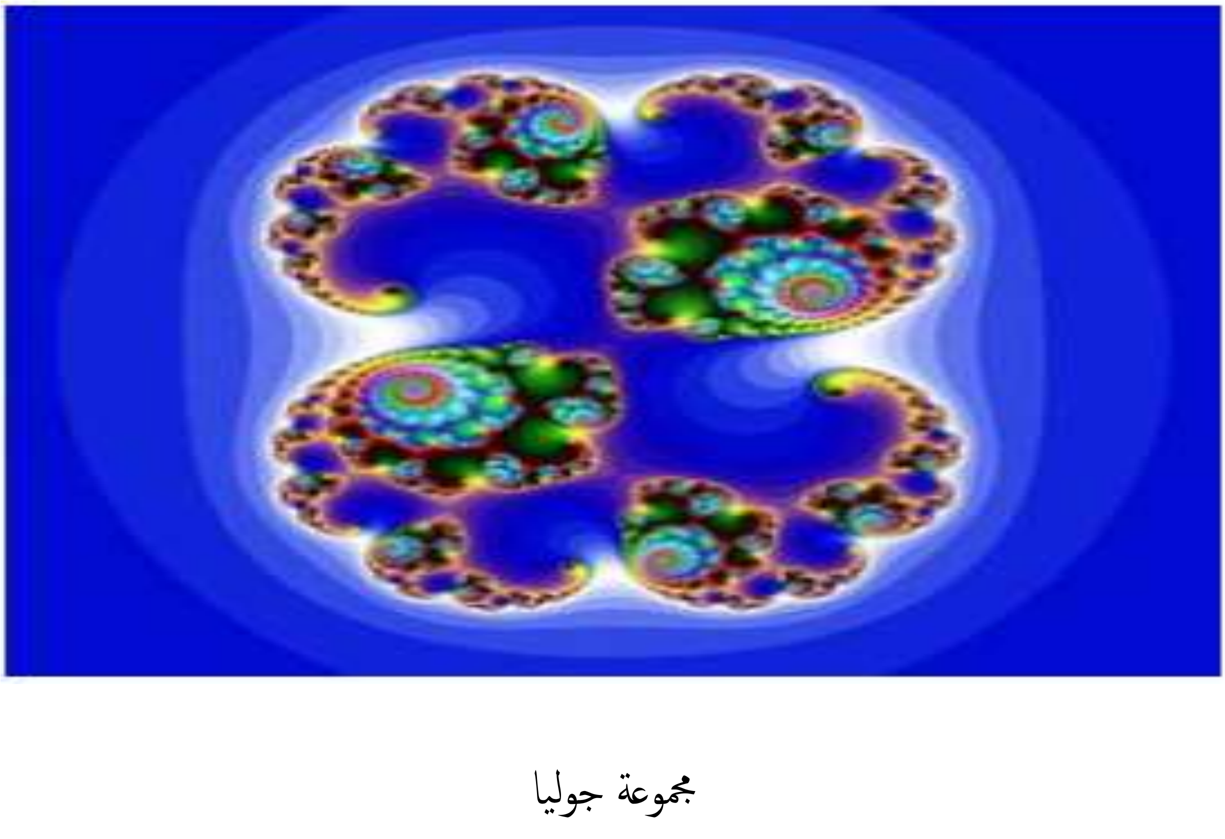
• ونظرًا لوجود تقابل بين المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ والمستقيم التخيلي $i\mathbb{R}$، فإنّ الخاصّة التي أثبتناها لتوّ في $\mathbb{R}$ تظلُّ صحيحة في $i\mathbb{R}$؛ أيّ أنّ كلّ مجموعة من النقاط المعزولة من المستقيم التخيلي $i\mathbb{R}$ هي مجموعة عدودة.

لنفترض الآن أنّ B مجموعةٌ من النقاط المعزولة من $\mathbb{C}$. عندئذ تكون المجموعتين $B_1 = \{\operatorname{Re} z : z \in B\}$ و $B_2 = \{\operatorname{Im} z : z \in B\}$ معزولتان، ومن ثمّ عدودتان من $\mathbb{R}$ و $i\mathbb{R}$ على التوالي. وعليه يكون جداؤهما الديكارتي $B_1 \times B_2$ عدودًا.

وننهي الإثبات بملاحظة أنّ المجموعة B محتواةٌ في المجموعة $\{x + iy : (x, y) \in B_1 \times B_2\}$ العدودة؛ إذْ هي في تقابل مع المجموعة العدودة $B_1 \times B_2$.



مجموعة مندلبروت



مجموعة جوليا