كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب

الفصل الخامس

انحراف العارضات باستخدام طريقة العناصر المحدَّدة

(Deflection of Beams Using Finite Element Method)

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

الفصل الخامس

انحراف العارضات باستخدام طريقة العناصر المحدَّدة

(Deflection of Beams Using Finite Element Method)

5.1 مقدمة : (Introduction)

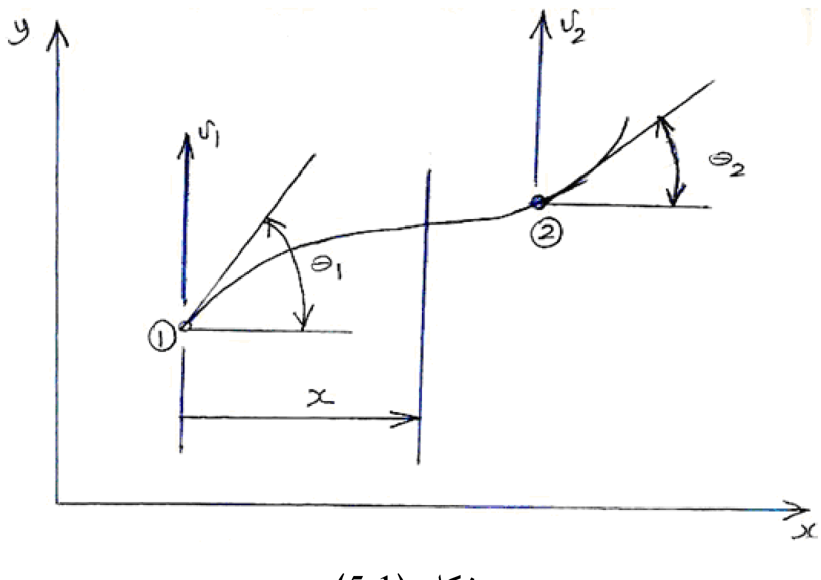
طبقاً للنظرية الهندسـية لانحراف العارضـات فإنَّ تغير الشـكل يتم تحديده بمنحني الانحراف (deflection curve) v(x) المأخوذ عند خط منتصف القضيب، وهكذا فإنَّ مسألة انحراف العارضات هي أحادية البعد ومحدَّدة العنصر تحتوي على عنصر خطي.

نعرف من ميكانيكا المواد أنَّ طاقة الانفعال تحتوي على v''(x)، عليه وللاستمرارية،

$$v(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=[f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

وهكذا فإنَّ العنصر يجب أن يمتلك أربعة درجات حرية.

كما في الســـابق فإننا نعتبر الإزاحات العقدية والميلانات ككميات متجهة، كما في الشـــكل (5.1) أدناه.



شكل (5.1)

$$[u^e]^t = \left[v_1 \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)_1 \quad v_2 \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)_2 \right]$$ ، الإزاحة العقدية (2)

عند x = 0 و x = L في المعادلة (1)،

$$v(x) = [f(x)]\{a\} \qquad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$[u]^e = [A]\{a\} \qquad (4)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{u\}^e$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$v^e(x) = [f(x)][A]^{-1}\{u\}^e$$

$$= [N(x)]\{u\}^e \qquad (5)$$

حقيقة،

$$[N(x)] = [f(x)][A]^{-1}$$

$$= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3][A]^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{C^T}{|A|}$$

$$|A| = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} + 0 = 1 \times \begin{bmatrix} L^2 & L^3 \\ 2L & 3L^2 \end{bmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

مصفوفة العوامل المرافقة C،

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = L^4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^3 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & L^3 \\ 0 & 3L^2 \end{vmatrix} = -3L^2$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & L^2 \\ 0 & 2L \end{vmatrix} = 2L$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L^2 & L^3 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} L^2 & L^3 \\ 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^4 - 2L^4 = L^4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^3 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} L & L^3 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^3 - L^3 = 2L^3 = -2L^3$$

$$A_{24} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} L & L^2 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = 2L^2 - L^2 = L^2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2L & 3L^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3L^2 \end{vmatrix} = 3L^2$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2L\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&2L\end{vmatrix}=2L$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\L&L^2&L^3\end{vmatrix}=0$$

$$A_{42}=+\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&L^2&L^3\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}0&0\\L^2&L^3\end{vmatrix}=0$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&L&L^3\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&0\\L&L^3\end{vmatrix}=-L^3$$

$$A_{44}=+\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&L&L^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&L\\L&L^2\end{vmatrix}=L^2$$

$$C=\begin{bmatrix}L^4&0&-3L^2&2L\\0&L^4&-2L^3&L^2\\0&0&3L^2&2L\\0&0&-L^3&L^2\end{bmatrix}$$

$$adj\,A=C^T=\begin{bmatrix}L^4&0&0&0\\0&L^4&0&0\\-3L^2&-2L^3&3L^2&-L^3\\2L&L^2&2L&L^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

$$[N(x)]=[f(x)][A]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&x&x^2&x^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\frac{3}{L^2}&-\frac{2}{L}&\frac{3}{L^2}&-\frac{1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\left(1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\quad\left(\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)\quad\left(-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right)\right] \quad (6)$$

لنخطو خطوة للأمام فإننا نحتاج لإيجاد v''(x)،

$$v''(x)=[N''(x)]\{u\}^e \qquad (7)$$

طاقة الانفعال للانحراف تُعطي كالآتي:

$$U^e=\frac{1}{2}\int_0^L EI\left(v''(x)\right)^2 dx \qquad (8)$$

$$U=\int M^2 dx/2EI$$

$$M=EI\,\frac{d^2v}{dx^2}$$

بوضع EI = [D]،

$$U^e=\frac{1}{2}\{u^e\}^t\left(\int_0^L [B]^t[D][B]dx\right)\{u\}^e \qquad (9)$$

لقضيب منتظم الشكل: (for a uniform bar)

$$[k]^e=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$[k]^e=\int_0^L [B]^t[D][B]dx$$

يتم الحصول على المعادلة (10) عاليه كالآتي:

للعنصر الأول،

$$[N(x)]=\left(1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}\right)$$

$$N'(x)=0-\frac{6x}{L^2}+\frac{6x^2}{L^3}$$

$$N''(x)=\frac{-6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}$$

$$[k]^e=EI\int_0^L\left(\frac{-6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\right)^2 dx$$

$$=EI\int_0^L\left(\frac{36}{L^4}-\frac{144x}{L^5}+\frac{144x^2}{L^6}\right)dx$$

$$=EI\left[\frac{36x}{L^4}-\frac{144x^2}{2L^5}+\frac{144x^3}{3L^6}\right]_0^L$$

$$=EI\left(\frac{36L}{L^4}-\frac{144L^2}{2L^5}+\frac{144L^3}{3L^6}\right)$$

$$=\frac{EI}{L^3}(36-72+48)=\frac{EI}{L^3}(12)$$

بمتابعة بقية العناصر يمكن الحصول على المعادلة (10)،

طاقة الوضع للأحمال الخارجية،

$$\Omega=-\sum\int_0^L\{u^e\}^t[N(x)]^t P(x)dx-\{u\}^e[P_c] \qquad (11)$$

حيث، $\{P_c\}=P_1,M_1,P_2,M_2$

أو $\Omega=-\sum\{u^e\}^t[P_d]^e-\{u\}^e\{P_c\}$ $\qquad (12)$

للانسجام: (For compatibility)

$$v_1^1=v_1$$

$$\theta_1^1=\theta_1$$

$$v_2^1=v_2$$

$$\theta_2^1=\theta_2$$

$$\{\tilde{u}\}=[C]\{u\}$$

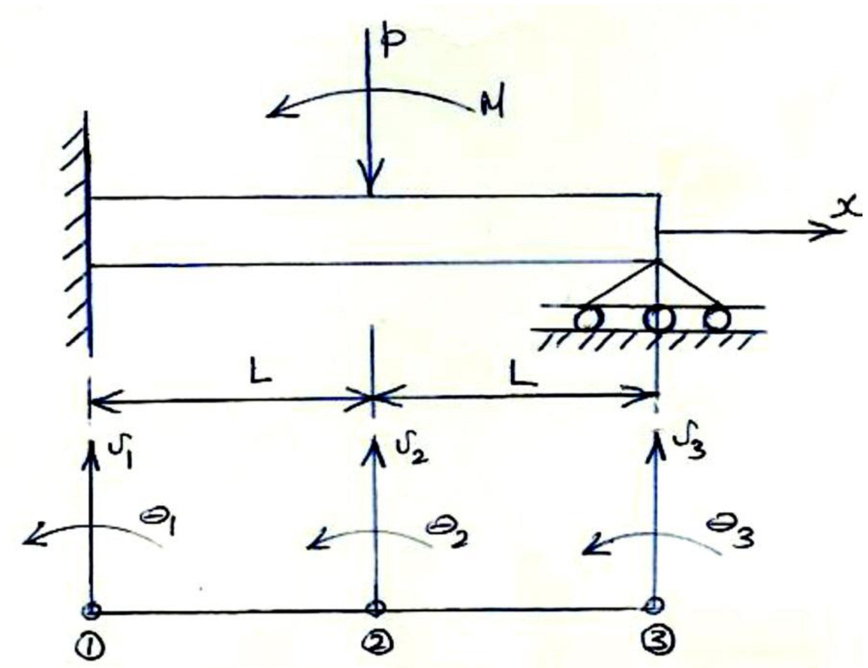
طاقة الوضع الكلية،

$$V=\frac{1}{2}\{u\}^t[k]\{u\}-\{u\}^t(\{P_d\}+\{P_c\})$$

للاتزان، $\delta V = 0$، عليه سنتحصل على،

$$[k]\{u\} = \{P\}$$
$$= \{\{P_d\} + \{P_c\}\}$$

5.2 مثال (1):



للانسجام: (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

بإجراء عملية التجميع: (carrying out the assembly process)

$$[k] = [C]^t [\tilde{k}][C]$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1 + k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (B. conditions)

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$$

أحذف الصفوف والأعمدة المناظرة لـ $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(k_{33}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1 + k_{12}^2\right) & k_{14}^2 \\ \left(k_{43}^1 + k_{11}^2\right) & \left(k_{44}^1 + k_{22}^2\right) & k_{24}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

أخيراً سنحصل على،

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} 7L^2 & 3L & -12L \\ 3L & 15 & -12 \\ -12L & -12 & 48 \end{bmatrix}$$

5.3 مثال (2):

تُعطي مصفوفة الكزازة لعنصر قضيب تحت تأثير الانحناء كالآتي:

$$[k]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^4 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^4 \end{bmatrix}$$

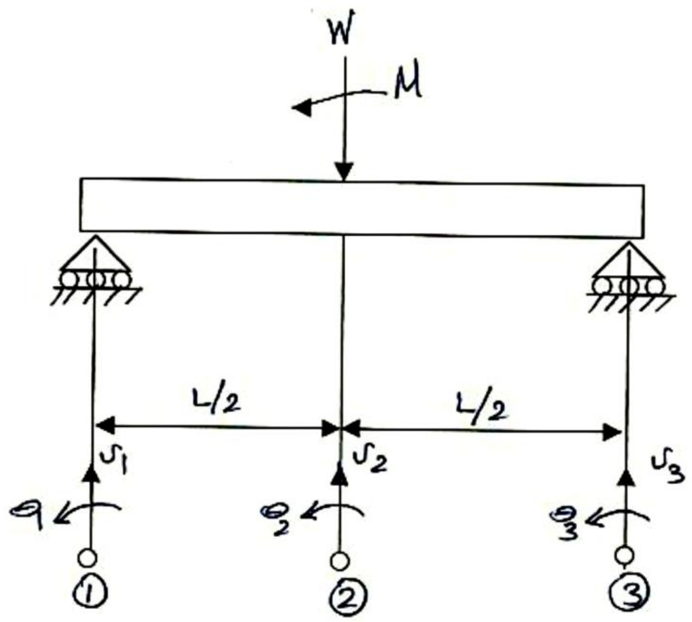
حيث،

E = معاير يونق للمرونة.

I = العزام الثاني للمساحة.

L = طول العنصر .

أوجد الإزاحة القصوى لعارضة مسندة إسناداً بسيطاً تحمل حملاً متمركزاً W عند منتصفها إذا كان طولها L. قارن إجابتك بالحل التحليلي للمسألة.



للإنسجام: (For compatibility)

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ \theta_1^1 \\ v_2^1 \\ \theta_2^1 \\ v_1^2 \\ \theta_1^2 \\ v_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = [C]^t [\tilde{k}] [C]$$

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1+k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1+k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}$$

معادلة الاتزان ،

$$[k]=\{u\}=\{P\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & \left(k_{33}^1+k_{11}^2\right) & \left(k_{34}^1+k_{12}^2\right) & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & \left(k_{43}^1+k_{21}^2\right) & \left(k_{44}^1+k_{22}^2\right) & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ 0 & 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ 0 & 0 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

الشروط الحدودية: (Boundary conditions)

$$v_1=v_3=\theta_2=0$$

$$P_1=\frac{W}{2},\ P_2=0,\ P_3=-\frac{W}{2}$$

$$M_1=0,\ M_2=M,\ M_3=0$$

أحذف الأعمدة والصفوف المناظرة للشروط الحدودية عاليه،

$$\begin{bmatrix} k_{22}^1 & k_{23}^1 & 0 \\ k_{32}^1 & \left(k_{33}^1+k_{11}^2\right) & k_{14}^2 \\ 0 & k_{41}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 0 \\ -6L & 24 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{W}{2} \\ M \\ -\frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[4L^2\theta_1-6Lv_2\right]=\frac{W}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L\theta_1+24v_2+6L\theta_3\right]=M \qquad (2)$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[6Lv^2+4L^2\theta_3\right]=-\frac{W}{2} \qquad (3)$$

من المعادلة (1)،

$$\theta_1 = \left[\frac{WL^3}{2EI} + 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \qquad (4)$$

من المعادلة (3)،

$$\theta_3 = \left[-\frac{WL^3}{2EI} - 6Lv^2\right] \times \frac{1}{4L^2} \qquad (5)$$

من المعادلتين (4) و(5)،

$$\theta_1 = -\theta_3 = \theta$$

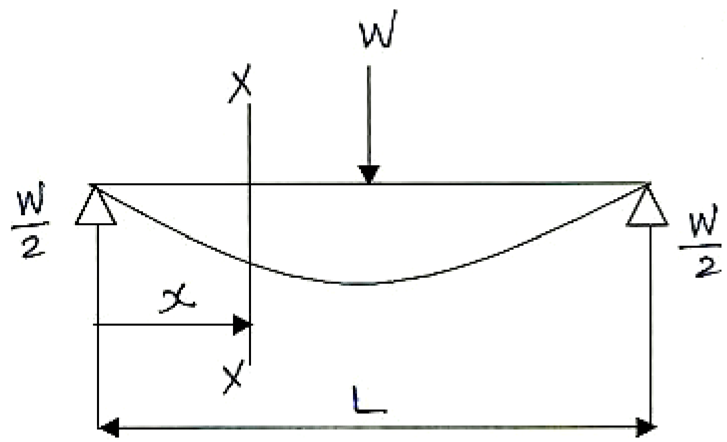
من المعادلة (2)،

$$\frac{EI}{L^3}\left[-6L^2\theta_3 + 24v_2 + 6L\theta_3\right] = M$$

$$\frac{EI}{L^3}\left[zero - 12L\theta_3 + 24v_2\right] = M = \frac{WL}{2}$$

$$24v_2\frac{EI}{L^3} = \frac{WL}{2}, \quad \therefore v_2 = \frac{WL^4}{48EI}$$

بالحل التحليلي،



$$-M = \frac{W}{2}x$$

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}Wx$$

بالتكامل،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}W\frac{x^2}{2} + A = -\frac{1}{4}Wx^2 + A \qquad \text{(i)}$$

يمكن إيجاد قيمة ثابت التكامل باستخدام شروط منتصف العارضة عندما $x = \frac{1}{2}L$ فإن

الميل $\frac{dy}{dx}$ يساوي صفر،

$$0 = -\frac{1}{4}W\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + A$$

$$\therefore A = \frac{WL^2}{16}$$

عوِّض عن قيمة A في المعادلة (i) وكامل مرة أخرى،

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}Wx^2 + \frac{WL^2}{16}$$

$$EIy = -\frac{Wx^3}{12} + \frac{WL^2x}{16} + B$$

B = 0، بما أنَّ الانحراف y يساوي صفر عند الأصل (عند x = 0)،

الانحراف الأقصى يحدث عند منتصف العارضة $\left(x = \frac{1}{2}L\right)$

$$y_{max} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{W\left(\frac{1}{2}L\right)^3}{12} + \frac{WL^2\left(\frac{1}{2}L\right)}{16}\right] = \frac{WL^3}{48EI}$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضرات أسلوب العناصر المحددة (F.E.M) في حل مسائل ميكانيكا المصمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.

7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.
8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).
12. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using finite element method ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).
13. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using dynamic relaxation method coupled with finite differences ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).

نبـذة عن المـؤلف:

أسامة محمد المرضي سليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسودان في العام 1966م. حاز على دبلوم هندســـة ميكانيكية من كلية الهندســـة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّـل أيضـاً على درجة البكالوريوس في الهندســـة الميكانيكية من جامعة الســـودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجسـتير في تخصـص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل الســـودان، بالإضـــافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضافة لخمسين ورقة علمية منشورة في دور نشر ومجلات عالمية إلى جانب إشــرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجســتير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشغِل الآن وظيفة أستاذ مساعد بقسم الميكانيكا بكلية الهندسة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضــافة لعمله كاســتشــاري لبعض الورش الهندســية بالمنطقة الصــناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندســـية لخراطة أعمدة المرافق واسطوانات السيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.