1 . مقدمة

نقدم في هذه الأوراق نبذة مختصرة عن نوع من الدوال الخاصة تسمى دوال ثيتا– جاكوبي (Jacobi Theta Functions)

تعرف دوال ثيتا – جاكوبي θ_1 ، θ_2 ، θ_3 ، θ_4 كما يلي :

$$\begin{cases} \theta_1(z,q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)z \\ \theta_2(z,q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)z \\ \theta_3(z,q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n+1)z \\ \theta_4(z,q) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q)^{n^2} \cos(2n+1)z \end{cases}$$

حيث $z \in \mathbb{C}$ و $q = e^{i\pi\tau}$ ، $|q| < 1$ ، $\mathrm{Img}(\tau) > 0$

وهي دوال ثنائية الدورة ، وبواسطتها يمكن تعريف دوال ناقصة (*Elliptic Functions*) .

سنتحدث هنا عن الدوال θ_2 ، θ_3 ، θ_4 الأساسية المعرفة على نصف المستوى المركب العلوي والتي نحصل عليها بوضع $z = 0$ في التعريف السابق

أي أن

$$\begin{cases} \theta_2(q) = 2\sqrt[4]{q} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} & 1.1 \\ \theta_3(q) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} & 1.2 \\ \theta_4(q) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-q)^{n^2} & 1.3 \end{cases}$$

نستطيع استنتاج علاقات مذهلة لهذه الدوال سواء باستخدام صورة المجاميع السابقة أو صورة المضاريب اللانهائية التي نستطيع الحصول عليها بتطبيق مضروب جاكوبي الثلاثي (Jacobi Triple Product) التالي

$$\forall\, x \neq 0\,,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} x^{2k} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})\,(1+x^2 q^{2n-1}) \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x^2}\right) \qquad 1.4$$

وكذلك متطابقة أويلر الشهيرة (Euler Identity)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\,(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})=1 \quad , \quad |q|<1 \text{ لكل} \qquad 1.5$$

برهان 1.4 :

نفرض أن

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^2q^{2n-1})\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x^2}\right) \qquad 1.4.1$$

وبالتالي نجد أن

$$F(qx)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^2q^{2n+1})\left(1+\frac{q^{2n-3}}{x^2}\right) \qquad 1.4.2$$

بقسمة 1.4.2 على 1.4.1 نجد بعد الاختصار أن

$$\frac{F(qx)}{F(x)}=\left(1+\frac{1}{qx^2}\right)\left(\frac{1}{1+qx^2}\right)=\left(\frac{1}{qx^2}\right) \qquad 1.4.3$$

أي أن

$$F(x)=qx^2F(qx) \qquad 1.4.4$$

الآن نعرف الدالة $G(x)$ بالعلاقة

$$G(x)=F(x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \qquad 1.4.5$$

ومنها نجد أن

$$G(qx)=F(qx)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \qquad 1.4.6$$

وباستخدام 1.4.4 فإن 1.4.6 تصبح

$$G(qx)=\frac{G(x)}{qx^2} \qquad 1.4.7$$

والتي نكتبها على الصورة

$$G(x)=qx^2G(qx) \qquad 1.4.8$$

مفكوك $G(x)$ بواسطة متسلسلة لورانت سيكون على الصورة

$$G(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x^{2m} \qquad 1.4.9$$

وبتطبيق (1.4.8)نجد

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x^{2m} = qx^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (qx)^{2m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x^{2m+2} q^{2m+1} \qquad 1.4.10$$

ومنها نجد أن

$$a_m = a_{m-1} q^{2m-1} \qquad 1.4.11$$

ومنها

$$a_m = a_0 q^{m^2} \qquad 1.4.12$$

وبالتعويض في (1.4.9) نحصل على

$$G(x) = a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} x^{2m} \qquad 1.4.13$$

بالعودة إلى 1.4.1 وبوضع $x = 1$ نجد أن

$$F(1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2 \qquad 1.4.14$$

وبالتالي

$$G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2 (1 - q^{2n}) \qquad 1.4.15$$

نلاحظ أن الثابت الوحيد في الطرف الأيمن هو 1 بينما بقية الحدود تتكون من قوى q العليا وبالمقارنة مع المجموع نستنتج أن

$a_0 = 1$ وهذا يبرهن أن

$$G(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} x^{2m} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + x^2 q^{2n-1})\left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x^2}\right) \qquad 1.4.17$$

وهكذا يكون انتهى إثبات 1.4 .

الآن

عندما نضع $x=\sqrt{q}$ في طرفي 1.4 نجد أن

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})(1+q^{2n-2})$$

ومنها نجد أن

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2$$

وهذه هي $\theta_2(q)$ في 1.1

وكذلك عندما نضع $x=1$ في طرفي 1.4نجد $\theta_3(q)$

وعندما نضع $x=1$ ونستبدل $(-q)$ بـ (q) نجد $\theta_4(q)$.

أي نحصل على التعريف التالي

$$\begin{cases} \theta_2(q) = 2\sqrt[4]{q}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2 & 1.6 \\ \theta_3(q) = 1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 & 1.7 \\ \theta_4(q) = 1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-q)^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2 & 1.8 \end{cases}$$

انتهينا في هذا البند من تعريف دوال ثيتا – جاكوبي وسنتعرف في البند الثاني على مجموعة رائعة من المتطابقات العجيبة، أغلب هذه المتطابقات قد تم اكتشافها والبرهنة عليها قديماً ولكني سأحاول هنا عرض البراهين التي توصلت لها حتى ولو كانت الطرق التي استخدمتها أقل روعة وجمالاً.

من أجمل المتطابقات التي سنتعرف عليها لاحقاً المتطابقة

$$\boxed{\theta_4^4(q)+\theta_2^4(q)=\theta_3^4(q)}$$

والتي تعرف بمتطابقة جاكوبي.

2. بعض متطابقات دوال ثيتا جاكوبي الأساسية

أولى المتطابقات يمكن ملاحظتها مباشرة من التعريف ، فنلاحظ أن $\theta_4(q) = \theta_3(-q)$

وإذا قمنا بالجمع نجد أن

$$\begin{aligned}\theta_3(q) + \theta_4(q) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \\ &= 2\sum_{n\ even} q^{n^2} \\ &= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2n)^2} \\ &= 2\theta_3(q^4)\end{aligned}$$

وهكذا حصلنا على المتطابقة الأولى

$$\theta_3(q) + \theta_4(q) = 2\theta_3(q^4) \qquad 2.1$$

أما إذا أخذنا الفرق فسنجد أن

$$\begin{aligned}\theta_3(q) - \theta_4(q) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \\ &= 2\sum_{n\ odd} q^{n^2} \\ &= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2n+1)^2} \\ &= 2\theta_2(q^4)\end{aligned}$$

وهكذا حصلنا على المتطابقة الثانية

$$\theta_3(q) - \theta_4(q) = 2\theta_2(q^4) \qquad 2.2$$

ومنهما (أو من التعريف مباشرة) نستطيع الحصول على

$$\theta_3(q) = \theta_3(q^4) + \theta_2(q^4) \qquad 2.3$$

وعلى

$$\theta_4(q) = \theta_3(q^4) - \theta_2(q^4) \qquad 2.4$$

الآن من (2.1)، (2.2) نستطيع الحصول على المتطابقة

$$\frac{\theta_3^2(q)-\theta_4^2(q)}{2}=2\theta_2(q^4)\theta_3(q^4) \qquad 2.5$$

وكذلك إذا ربعنا كلاً من (2.3) , (2.4) وجمعناهما نحصل على المتطابقة

$$\frac{\theta_3^2(q)+\theta_4^2(q)}{2}=\theta_2^2(q^4)+\theta_3^2(q^4) \qquad 2.6$$

نلاحظ في جميع المتطابقات السابقة أن العلاقة كانت بين دوال ثيتا عند q و q^4 ، وسنحاول الان الانتقال إلى متطابقات من نوع آخر و بعد ذلك سنحاول الربط بين النوعين

مدخل 2.1 :

$$\theta_2^2(q)=2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2) \qquad 2.7$$

$$\theta_4^2(q^2)=\theta_4(q)\theta_3(q) \qquad 2.8$$

برهان 2.7 :

واضح أن الأفضل استخدام التعريف الذي بواسطة المضروب فإذا استخدمنا (1.6) و (1.7) سنجد أن

$$2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2)=4\sqrt[4]{q^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^2(1+q^{4n})^2(1+q^{4n-2})^2 \qquad 2.7.1$$

ولتبسيط (2.7.1) نستخدم متطابقة أويلر (1.5) والتي نستطيع كتابتها على الصورة

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4n-2}}\ ,\quad \text{لكل}\ \ |q|<1 \qquad 1.5.1$$

والصورة

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2})(1+q^{4n})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{4n-2}}\ ,\quad \text{لكل}\ \ |q|<1 \qquad 1.5.2$$

نبدأ بالتعويض من (1.5.2) في (2.7.1) فنجد أن

$$2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2)=4\sqrt{q}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{4n})^2}{(1-q^{4n-2})^2} \qquad 2.7.2$$

وإذا استخدمنا (1.5.1) تصبح (2.7.2) بالصورة

$$2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2) = 4\sqrt{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n})^4 \qquad 2.7.2$$

أي أن

$$2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2) = \theta_2^2(q)$$

وهو المطلوب اثباته.

برهان 2.8 : سيكون بنفس طريقة برهان (2.7) ولهذا نتركه ليستمتع به القارئ .

نتيجة 2.2 :

$$\frac{\theta_3^2(q)-\theta_4^2(q)}{2} = \theta_2^2(q^2) \qquad 2.9$$

$$\frac{\theta_3^2(q)+\theta_4^2(q)}{2} = \theta_3^2(q^2) \qquad 2.10$$

برهان 2.9 : (سهل ومباشر وذلك باستخدام (2.5) و (2.7) مع تغيير ما يلزم) .

برهان 2.10 :

نبدأ من التعريف $\theta_3(q)$ في (1.2)

وتربيع الطرفين نجد أن

$$\theta_3^2(q) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{n^2+m^2} \qquad 2.10.1$$

وكذلك نجد أن

$$\theta_4^2(q) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2}\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} (-1)^{n+m} q^{n^2+m^2} \qquad 2.10.2$$

بجمع (2.10.1) ، (2.10.2) نجد

$$\theta_3^2(q)+\theta_4^2(q) = 2\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \\ m+n\ even}} q^{n^2+m^2} \qquad 2.10.3$$

نضع $m+n=2k$ ، $m-n=2j$ ونعيد كتابة (2.10.3) نصل للمطلوب

$$\theta_3^2(q)+\theta_4^2(q) = 2\sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2} q^{2(k^2+j^2)} = 2\theta_3^2(q^2) \qquad 2.10.4$$

هذا البرهان الجميل منقول من مذكرات Ramanujan الجزء الثالث.

نستطيع الحصول من المتطابقتين (2.9) ، (2.10) على متطابقتين رائعتين هما

$$\theta_3^2(q^2)+\theta_2^2(q^2)=\theta_3^2(q) \qquad 2.11$$

$$\theta_3^2(q^2)-\theta_2^2(q^2)=\theta_4^2(q) \qquad 2.12$$

مبرهنة 2.3 (Jacobi)

$$\theta_4^4(q)+\theta_2^4(q)=\theta_3^4(q) \qquad 2.13$$

البرهان : نلاحظ أن

$$\theta_3^4(q)-\theta_4^4(q)=[\theta_3^2(q)-\theta_4^2(q)][\theta_3^2(q)+\theta_4^2(q)]$$

وباستخدام المتطابقتين (2.9) ، (2.10) نستطيع تبسيط الطرف الأيمن و يكون لدينا

$$\begin{aligned}\theta_3^4(q)-\theta_4^4(q)&=4\theta_2^2(q^2)\theta_3^2(q^2)\\&=[2\theta_2(q^2)\theta_3(q^2)]^2\end{aligned}$$

لو لاحظنا (2.7) سنجد أن الطرف الأيمن في الخطوة الأخيرة يساوي $\theta_2^4(q)$ وهكذا يكون تم الاثبات .

إذا أعدنا كتابة متطابقة جاكوبي باستخدام تعاريف دوال ثيتا بصورتي المجموع وبالمضروب نجد أن

$$\begin{cases}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^4+\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\right)^4=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^4 & 2.14\\[2ex] 16q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^8+\prod_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^8=1 & 2.15\end{cases}$$

كانت هذه بعض المتطابقات الأولية لدوال ثيتا الأساسية والتي يمكن توليد منها عدد كبير من المتطابقات كما يمكن استنتاج متطابقات أخرى تكون فيها العلاقة بين دوال ثيتا عند q و q^r و التي تساعد خواصها العجيبة في مسألة التقريب والتي نحتاجها في كثير من الحسابات الخاصة في بعض التكاملات الخاصة (مثل Elliptic integrals) و بعض المتسلسلات (مثل Lambert series) .

في الأخير سأرفق بعض التمارين لمن يحب أن يستمتع بهذه الدوال .

3 . تمارين

تمرين (1): برهن أن

$$2\theta_3(q)\theta_3(q^4) = \theta_3^2(q) + \theta_4^2(q^2)$$

تمرين (2): إذا كانت $F(x) = \left(\frac{\theta_2(x)}{\theta_3(x)}\right)^2$ فبرهن أن $F(x)$ تحقق المعادلة الدالية

$$F(x^2) = \frac{1-\sqrt{1-F^2(x)}}{1+\sqrt{1-F^2(x)}}$$

تمرين (3): بفرض أن $A(q) = \theta_3^4(q) + \theta_2^4(q)$ ، $B(q) = \theta_3^4(q) - \theta_2^4(q)$ ، $C(q) = 2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$, برهن أن

$$\begin{cases} A^2(q) = B^2(q) + C^2(q) & (1 \\ A(q) = A(q^2) + 3C(q^2) & (2 \\ A(q^2) = \dfrac{A(q) + 3B(q)}{4} & (3 \end{cases}$$

تمرين (4): نعرف $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 sin^2(\theta)}}$ لكل $0 < x < 1$ ، برهن أن

$$K\left(\frac{\theta_2^2(x)}{\theta_3^2(x)}\right) = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(x)$$

تمرين (4): برهن أنه مهما يكن $x \in \mathbb{R}^*$ فإن

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2n\pi x}}{1-e^{-2n\pi/x}}\right)^{12} = \frac{e^{\pi(x-1/x)}}{x^6}$$

تمرين (5): نعرف الدالة $A(x) = \frac{1}{\sqrt[8]{16x}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^{2n-1}}{1+x^{2n}}\right)$ لكل $0 < x < 1$ ، برهن أن

$$A^2(x^2) + A^{-2}(x^2) = 2A^4(x)$$

4 . المصادر

[1] T. M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet series in Number Theory* ,2nd ed.,Springer-Verlag,1990.

[2] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III,* Springer-Verlag, N. Y.,1991.

[3] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM,* Wiley-Interscience Publiattion, 1987.