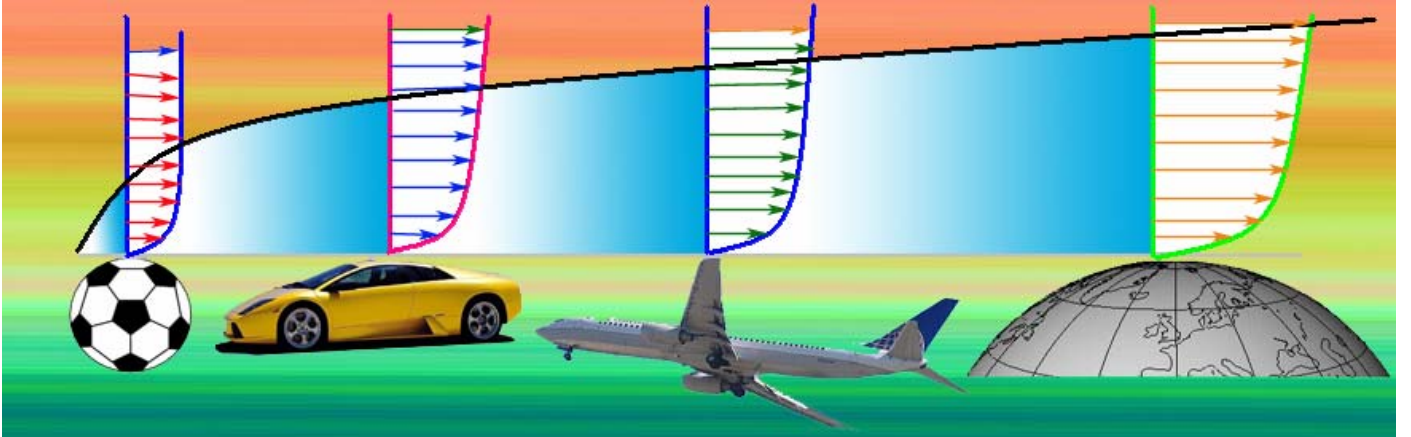


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



الطبقة الحُدُودية

تعتبر الطبقة الحُدُودية أو الطبقة الجدارية (boundary layer) من المواضيع المهمة في ميكانيك السوائل و أحياناً يطلق عليها نظرية الطبقة الحُدُودية . تخضع هذه النظرية لطيف واسع من قوانين و مفاهيم ميكانيك السوائل كمفهوم اللزوجة و حفاظ الكتلة و حفاظ كمية الحركة و معادلات نافير ستوكس. لقد خصصت لكل من المواضيع المرتبطة بنظرية الطبقة الحُدودية فصل خاص تناولت فيه هذه المواضيع بصورة مُبسطة .

يمكن دراسة الطبقة الحُدودية في حركة السوائل على السطوح مثل حركة سائل على سطح مسطح أو على سطح الكرة و الإسطوانة و على سطح الجُنَّيح و داخل الأنابيب و إنشعاباتها و أقواسها مثل إنشعاب T أو إنشعاب Y أو في الأقواس مثل U .

من أهم نتائج الطبقة الحُدودية فاصلتها و سُمكها و القوى المقاومة التي تنتج عنها ، غالباً تتم دراسة الطبقة الحُدودية داخل نفق الهواء .



اللزوجة - viscosity

لكل مائع (سائل) لزوجة يمكن إحساس شدتها عند حركة أصابع اليد المغطاة بذلك السائل ، و القوة الناتجة منها عند حركة جسم في ذلك السائل أشبه بقوة الإحتكاك الناتجة من حركة جسمين على بعضهما . و الزوجة نوعان :

اللزوجة الديناميكية (dynamic viscosity) أو المطلقة هي عبارة عن مقاومة السريان عند الحركة و يرمز لها بالحرف μ

اللزوجة الكينماتيكية (kinematic viscosity) و هي عبارة عن نسبة اللزوجة الديناميكية لمائع

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

لكثافته و يرمز لها بالحرف ν أي

وحدة اللزوجة في النظام العالمي (SI) ستوكس (stokes) و مخففا (St) و هي $\frac{m^2}{sec}$ كمية السائل

التي تخرج من ثقب معين في الثانية

$$1st = 10^{-4} \frac{m^2}{sec}$$

$$1st = 100cSt$$

سنتي ستوكس

○ تنخفض اللزوجة الكينماتيكية للموائع عند ارتفاع درجة الحرارة

○ ترتفع اللزوجة الكينماتيكية للغازات مع ارتفاع درجة الحرارة

لزوجة بعض السوائل :

1cSt	الماء في 20 درجة سانتيجراد
4.3cSt	الحليب
43.2cSt	الزيت النباتي
220cSt	عصير الطماطم
2200cSt	العسل

الوحدة الأخرى للزوجة سايبولت (SUS) Saybolt Universal Seconds

وحدة اللزوجة الديناميكية (poise)

الزمن ثانية s و pa باسكال

$$1pa \cdot s = 10poise = 1000Centipoise$$

$$1pa \cdot s = 1 \frac{N}{m^2} \cdot s = 1 \frac{kg}{m \cdot s}$$

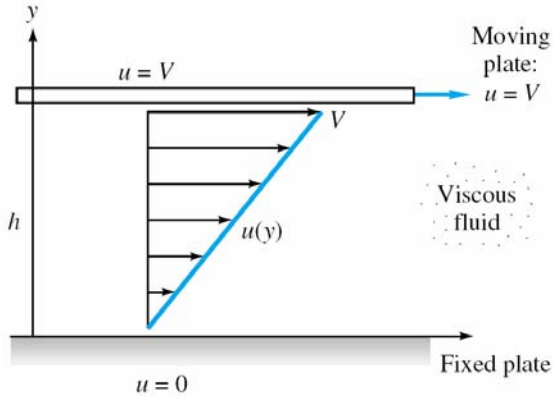
نيوتن N

جدول تبديل وحدة اللزوجة

Centipoise (CPS) or Millipascal (mPas)	Poise (P)	Centistokes (CSt)	Stokes (St)	Saybolt Universal (SSU)
1	0.01	1	0.01	31
2	0.02	2	0.02	34
4	0.04	4	0.04	38
7	0.07	7	0.07	47
10	0.1	10	0.1	60
15	0.15	15	0.15	80
20	0.2	20	0.2	100
25	0.24	25	0.24	130
30	0.3	30	0.3	160
40	0.4	40	0.4	210
50	0.5	50	0.5	260
60	0.6	60	0.6	320
70	0.7	70	0.7	370
80	0.8	80	0.8	430
90	0.9	90	0.9	480
100	1	100	1	530
120	1.2	120	1.2	580
140	1.4	140	1.4	690
160	1.6	160	1.6	790
180	1.8	180	1.8	900
200	2	200	2	1000
220	2.2	220	2.2	1100
240	2.4	240	2.4	1200
260	2.6	260	2.6	1280
280	2.8	280	2.8	1380
300	3	300	3	1475
320	3.2	320	3.2	1530
340	3.4	340	3.4	1630

اللزوجة الديناميكية و الكينماتيكية للهواء في الضغط المعياري

<u>Temperature</u> - t - (K)	<u>Dynamic Viscosity</u> - μ - (kg/m s) $\times 10^{-5}$	<u>Kinematic Viscosity</u> - ν - (m ² /s) $\times 10^{-6}$
100	0.6924	1.923
150	1.0283	4.343
200	1.3289	7.490
250	1.488	9.49
300	1.983	15.68
350	2.075	20.76
400	2.286	25.90
450	2.484	28.86
500	2.671	37.90
550	2.848	44.34
600	3.018	51.34
650	3.177	58.51
700	3.332	66.25



إجهاد قصّ السوائل - Fluid Shear Stress

إجهاد القص بين طبقات السائل هو:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

μ اللزوجة الديناميكية

∂u تغيرات السرعة

∂y تغيرات الفاصلة

مسلمة نظرية ديناميك السوائل : سرعة السائل في نقطة تماسه مع سطح الجسم تساوي صفر

يقسم سريان السوائل إستناداً على لزوجة السائل و عدم لزوجته الى سريان لزج (viscous flow) و سريان غير لزج (inviscid flow) هو سريان سائل لزوجته تساوي صفر .

عدد رينولدز – Reynolds Number

عدد رينولدز هو عدد لا بُعدي و عبارة عن نسبة قوة العطالة (inertial force) ρV^2 الى قوة

اللزوجة $\frac{\mu V}{L}$ أي :

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2}{\frac{\mu V}{L}} = \frac{\rho L V}{\mu} = \frac{L V}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{L V}{\nu}$$

$$\text{Re} = \frac{L V}{\nu}$$

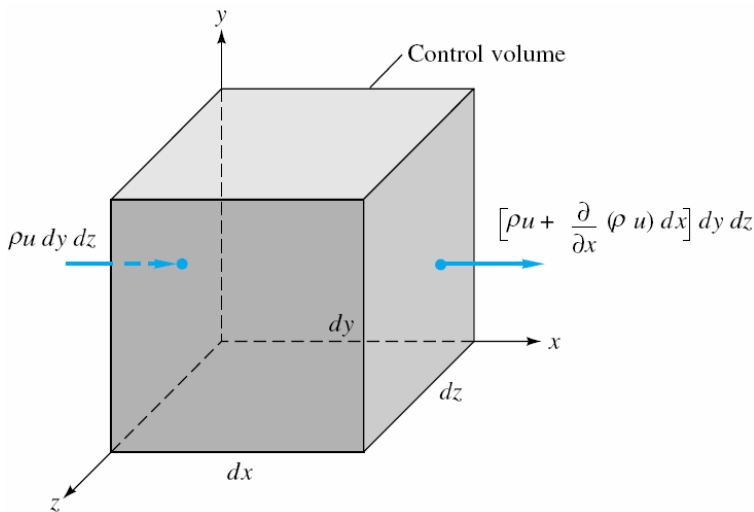
V سرعة السائل ، ρ كثافة السائل ، μ اللزوجة الديناميكية ، ν اللزوجة الكينماتيكية ، L مُميّزة الطول (طول أو قطر)

من خلال عدد رينولدز و خشونة أو نعومة السطح الداخلي للأنايبب يمكن تعيين معامل إحتكاك السائل

داخل الأنايبب من بياني مودي (Moody diagram)

معادلة حفظ الكتلة - Mass Continuity Equation

إستناداً على قانون حفظ الكتلة في المقياس الماكروسكوبي فالكتلة تبقى ثابتة و لا تتغير أي إذا فرضنا حجم تحكم (control volume) فالكتلة التي تدخل هذا الحجم تساوي الكتلة التي تخرج منه . معدل التدفق (flow rate) و هو - الكثافة في السطح في السرعة $\rho(dydz)u$ - الذي يدخل من أحد أطراف حجم التحكم يخرج من الطرف الآخر متأثراً بتغيرات جزئية لكن مجموع هذه التغيرات لا تؤثر على كمية الكتلة .



سرعة السائل بموازاة المحور x تساوي u

سرعة السائل بموازاة المحور y تساوي v

سرعة السائل بموازاة المحور z تساوي w

أجزاء الطول و العرض و الإرتفاع لحجم التحكم بالترتيب هي :

dx

dy

dz

إذن الكتلة التي تدخل و تخرج من هذا الحجم التحكم هي :

بموازاة محور	الكتلة التي تدخل	الكتلة التي تخرج
x	$\rho u dy dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy$

معنى حفظ الكتلة هو إن مجموع الكتلة التي تدخل حجم التحكم تساوي الكتلة التي تخرج منه ، إذن :

$$\rho u dydz + \rho v dx dz + \rho w dx dy = \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dydz + \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \right] dx dz + \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz \right] dx dy$$

نحذف العبارات المساوية من طرفين هذا التساوي كذلك نقسم طرفين هذا التساوي على $dx dy dz \neq 0$ نحصل على هذه المعادلة :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

إذا فرضنا السائل غير إنضغاطي (incompressible) أي تدرج¹ سرعة السائل صفر لهذا فالكثافة ρ لا ترتبط بالزمن و ثابتة لا تتغير ، تصبح معادلة حفظ الكتلة في ميكانيك السوائل بهذه الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

معادلة حفظ الكتلة هذه في حالة الكثافة ثابتة لا تتغير مع الزمن ، أما إذا تغيرت الكثافة مع الزمن فأحد صيغ معادلة حفظ الكتلة بهذه الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho d \Lambda + \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

ρ الكثافة ، dA جزء السطح ، $d\Lambda$ جزء الحجة ، $c.v.$ حجم التحكم ، $c.s$ سطح التحكم ، V سرعة السائل

معادلة حفظ كمية الحركة

$$\vec{F}_s + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \vec{V} d \Lambda + \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

\vec{F}_s القوى خارجية و قوى المقاومة و رد الفعل كقوة الاحتكاك ، \vec{F}_B قوة الثقالة

-1 Divergence ، لأن أحد صيغ معادلة حفظ الكتلة هي : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$

مثال حفظ الكتلة : خزان حجمه $0.05m^3$ يحتوي على غاز ضغطه $800kpa$ و درجو حرارته $15^\circ C$ في لحظة $t = 0$ يفتح صمام الخزان و يخرج الغاز من مجرى مساحته $65mm^2$ و سرعته $311\frac{m}{s}$ كثافة الغاز $6.13\frac{kg}{m^3}$ المطلوب تغيرات الكثافة .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho d\Lambda + \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \Lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathcal{V} A = 0$$

$$\Lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathcal{V} A = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho \mathcal{V} A}{\Lambda} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{6.13 \times 311 \times \frac{65}{10^6}}{0.05} = -2.48 \frac{kg}{m^3 \text{ sec}}$$

Λ الحجم و A السطح و V السرعة

مثال حفظ كمية الحركة : يخرج الماء من نفاث سطح مقطعه $0.01m^2$ بسرعة $15\frac{m}{s}$ و يصطدم بمانع ، المطلوب القوى الأفقيه على المانع .

$$\vec{F}_s + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v.} \rho \vec{V} d\Lambda + \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

التغيرات بالنسبة للزمن ثابتة و قوة ثقالة وزن السائل قليلة جداً إذن :

$$\vec{F}_s = \int_{c.s} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow F_{sx} = \int_A -V |\rho \mathcal{V} dA| = -V \rho \mathcal{V} A$$

$$F_{sx} = -V \rho \mathcal{V} A \Rightarrow F_{sx} = -15 \times 999 \times 15 \times 0.01 = -2.25kN$$

F_{sx} القوة في جهة المحور x و كثافة الماء حدود $\rho = 999\frac{kg}{m^3}$ هذه القوة مؤثرة على حجم التحكم

و عكس هذه القوة مؤثرة على الجسم .

معادلات نافير - ستوكس Navier – Stokes Equations

تعتبر معادلات نافير - ستوكس من المعادلات المهمة في ميكانيك السوائل ، و يمكن إستنتاجها من تحليل قوى الضغط و اللزوجة و الثقالة و التعجيل المؤثرة على حجم التحكم ، و هي :

متجهة السرعة

$$\vec{V} = ui + vj + wk$$

الإشتقاقات التالية

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

تعجيل (كل أجزاء) السائل في حقل السرعة يساوي : $\frac{D\vec{V}}{Dt}$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

القوى الناتجة من الضغط :

$$\nabla \cdot P = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

P الضغط و ∇ مؤثر دلتا و يساوي :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

القوى الناتجة من اللزوجة :

$$\mu(\nabla^2 V) = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

μ اللزوجة الديناميكية و ∇^2 مؤثر لابلاس و يساوي :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

قانون نيوتن الثاني ($ma = \sum F$ ، القوة F ، الكتلة m و a التعجيل) على كل جزء من أجزاء السائل

هو :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot P + \mu(\nabla^2 \vec{V}) + \rho \vec{B}$$

في هذه الرابطة ρ الكثافة و $\rho \vec{B}$ متجهة القوى الجانبية المؤثرة على السائل بالنسبة الى وحدة الحجم

كقوة الوزن أو قوة الطرد المركزي إذا كان التعجيل a تصبح B بهذه الصورة :

$$B = a_x + a_y + a_z$$

معادلات نافير – ستوكس في مختلف الجهات :

في جهة المحور x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\nabla^2 u) + \rho a_x$$

في جهة المحور y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\nabla^2 v) + \rho a_y$$

في جهة المحور z

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\nabla^2 w) + \rho a_z$$

هذه المعادلات هي لسريان لزج لا إنضغاطي .

للتوضيح :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

يمكن الإستعانة بمعادلة برنولي (Bernoulli equation) لتعين تغيرات الضغط على الخطوط
الإنسيابية (streamlines)

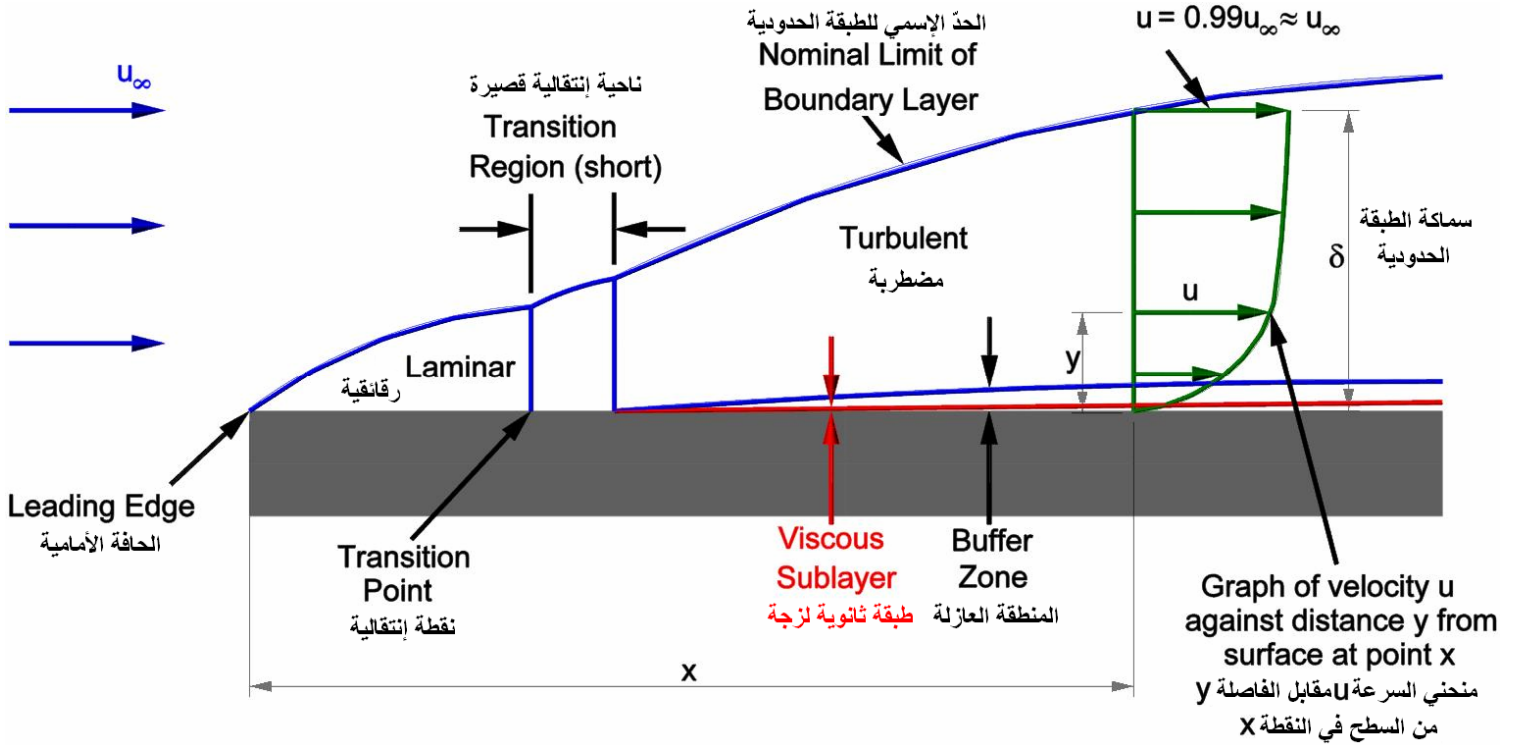
$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho gh = \text{ثابت}$$

الطبقة الحدودية – Boundary Layer

تتشكل الطبقة الحدودية نتيجة حركة سائل بسرعة على سطح جسم أو حركة جسم داخل سائل ، بعيداً عن سطح الجسم السريان غير لزج و معادلات حركة السائل غير لزجة بالنتيجة سرعة السائل ثابتة و مساوية لسرعة المصدر ، و بمجاورة (قرب) سطح الجسم السريان لزج و معادلات حركة السائل لزجة و سرعة السائل في هذه الناحية التي تعرف بسُمك الطبقة الحدودية متغيرة .

بما أن جهد قصّ السائل يرتبط بتغير السرعة بالنسبة للفاصلة $(\tau = \mu \frac{du}{dy})$ لذلك في هذه الناحية

السائل يعيق و يقاوم حركة الجسم . ترتبط الطبقة الحدودية بسرعة السائل (السرعة النسبية بين الجسم و السائل) و لو فرضنا سريان سائل بموازاة سطح مسطح (مثل صفحة) تختلف نواحي الطبقة الحدودية على هذه الصفحة في فواصل مختلفة على هذه الصفحة كما في الشكل :



الفرق بين الضغط و إجهاد القصّ هو : الضغط عمود على الجسم و إجهاد القصّ مماس على الجسم .

ترتبط نواحي الطبقة الحدودية بعدد رينولدز و هذه النواحي هي :

$0 < Re < 1$ ناحية رقائقية عالية اللزوجة

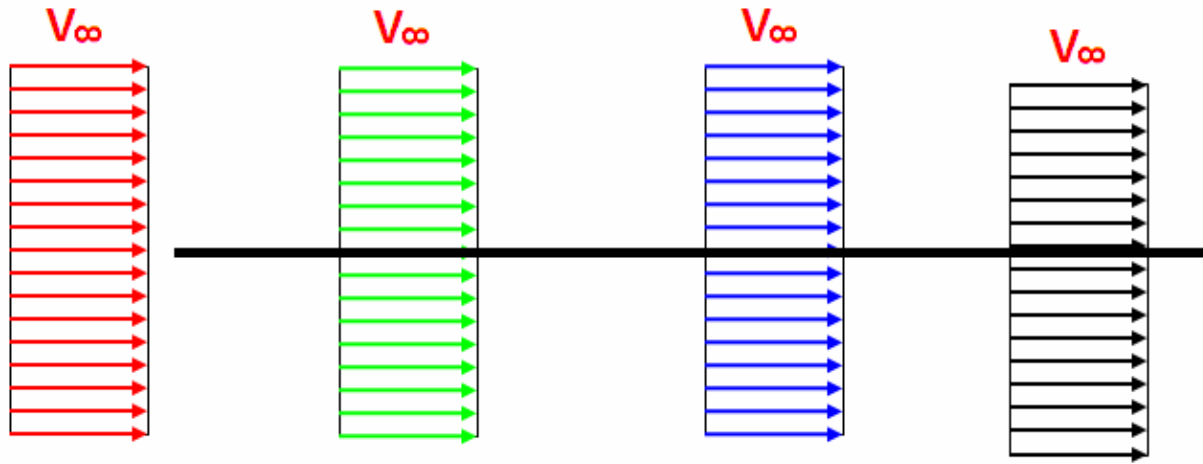
$1 < Re < 100$ ناحية رقائقية مرتبطة ارتباط شديد بعدد رينولدز

$100 < Re < 10^3$ ناحية رقائقية ، المتستعملة في نظرية الطبقة الجداري

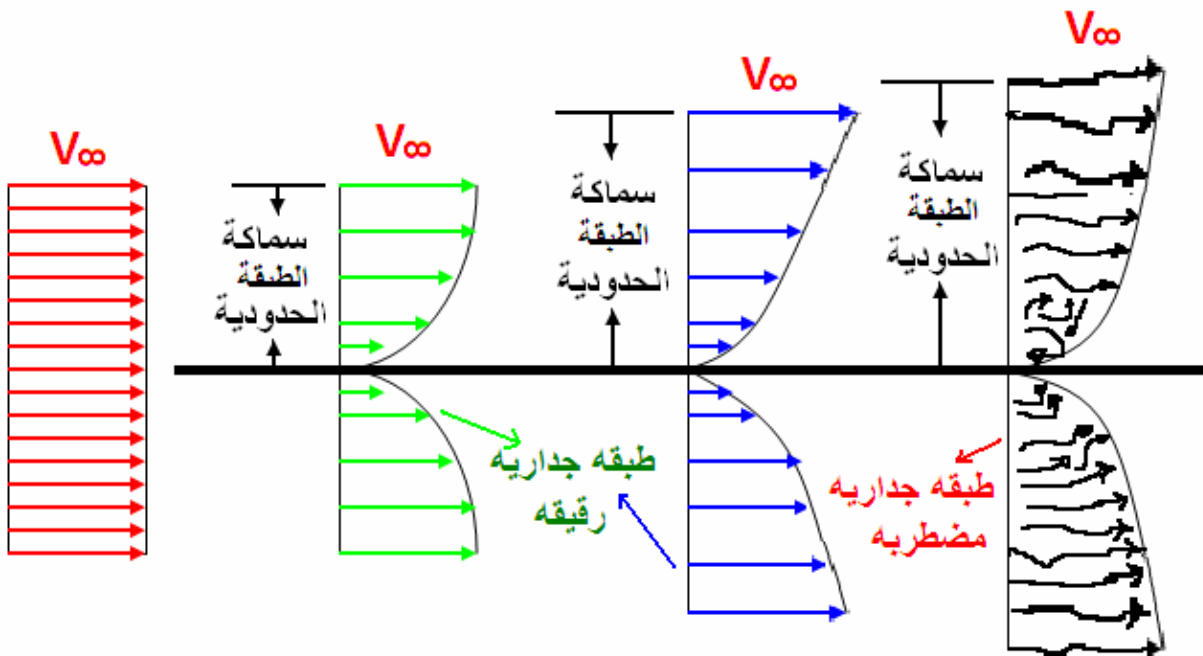
$10^3 < Re < 10^4$ إنتقال الى الناحية المضطربة

$10^4 < Re < 10^6$ الناحية المضطربة

$10^6 < Re < \infty$ ناحية مضطربة ، مرتبطة إرتباط ضعيف بعدد رينولدز



سريان غير لزج بموازاة سطح مسطح



سريان لزج بموازاة سطح مسطح

معادلات الطبقة الحدودية في الصفحة :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

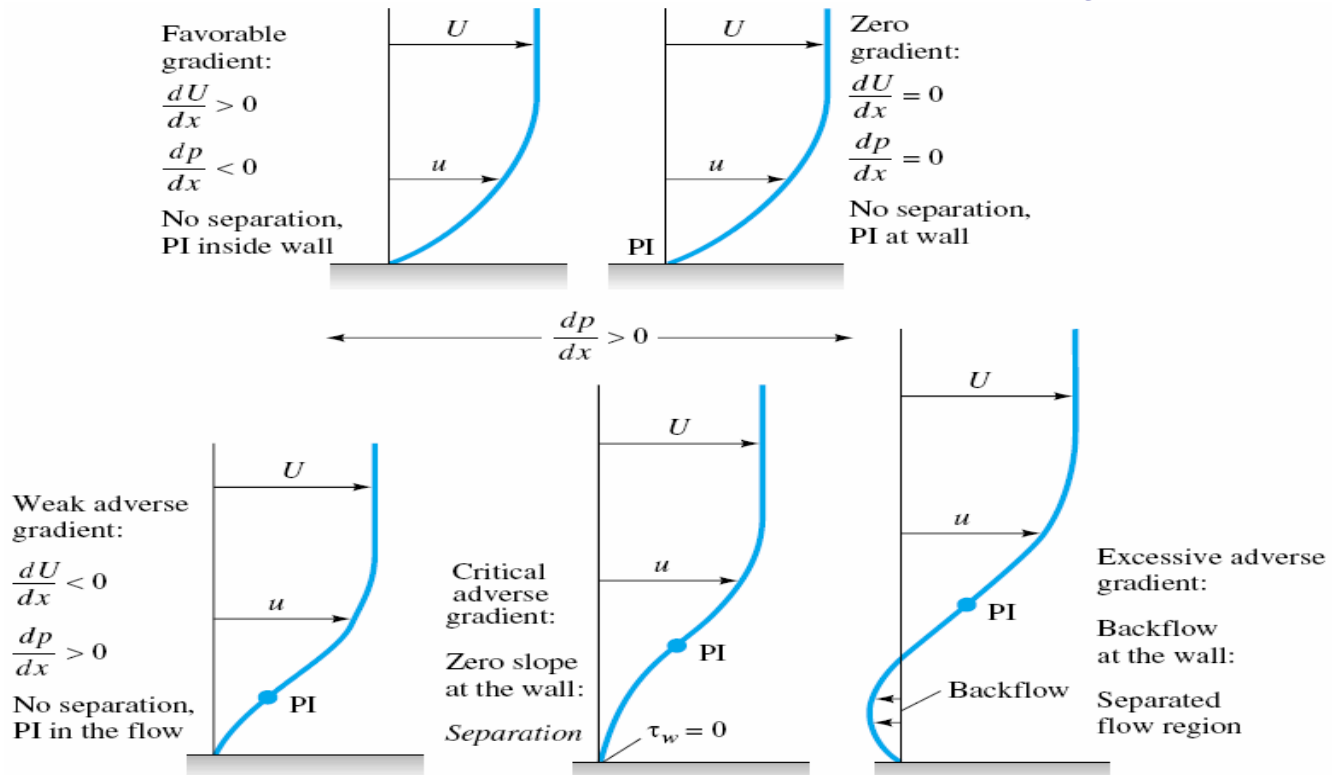
$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

إذا كان السريان لا إنضغاطي (كما عرفناه سابقاً و كذلك هو سريان سرعته إقل بكثير من سرعة

الصوت) و $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ أي السائل في شرائط معيارية إذن :

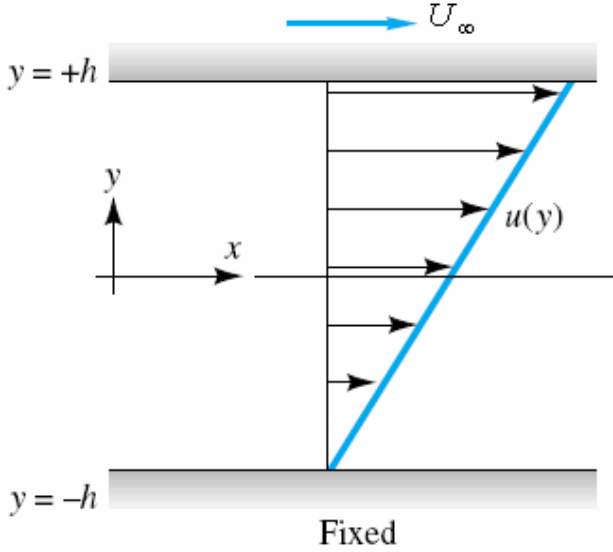
$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

أثر تغيرات الضغط على الطبقة الحدودية



تغيرات السرعة داخل الطبقة الحدودية

- سائل بين سطحين مسطحين موازيين (واسعاً جداً) أحد السطوح ثابتة و الآخر بسرعة U_∞ منحني توزيع السرعة بين هذين السطحين كما في الشكل :



الفاصلة بين السطحين $2h$

تغيرات الضغط قليلة جداً و يمكن غض النظر عنها

السرعة فقط في جهة محور x إذن :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \Rightarrow u(y) = C_1 y + C_2$$

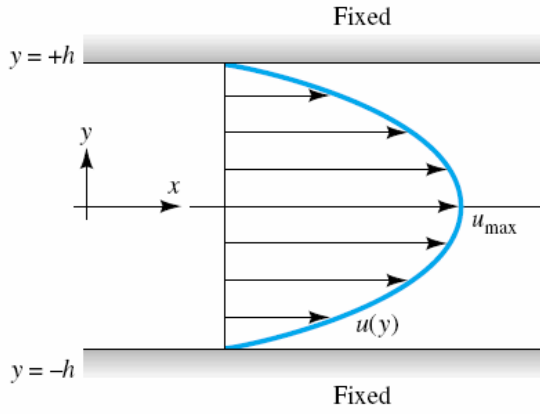
الشروط الحدية :

$$\left. \begin{array}{l} y = -h \\ y = h \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(y) = 0 \\ u(y) = U_\infty \end{array} \right. \Rightarrow u(y) = \frac{U_\infty}{2h} y + \frac{U_\infty}{2} \quad -h \leq y \leq h$$

$$u(y) = \frac{U_\infty}{2h} y + \frac{U_\infty}{2}$$

• السطحين ثابتين و السائل بينهما يتحرك بسرعة U_∞ منحنى توزيع السرعة بين هذين

السطحين كما في الشكل :



تغيرات الضغط بين هذين السطحين في جهة المحور x

ثابتة أي $\frac{\partial P}{\partial x} = C < 0$ إذن :

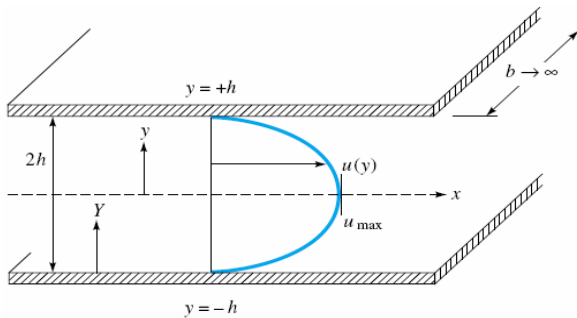
$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} C \Rightarrow \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{\mu} C \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} C y^2 + C_1 Y + C_2$$

الشروط الحدية

$$\left. \begin{array}{l} y = -h \\ y = h \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(y) = 0 \\ u(y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_1 = 0 \quad \text{و} \quad C_2 = -\frac{Ch^2}{2\mu}$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} C y^2 - \frac{Ch^2}{2\mu} \Rightarrow u(y) = -\frac{Ch^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

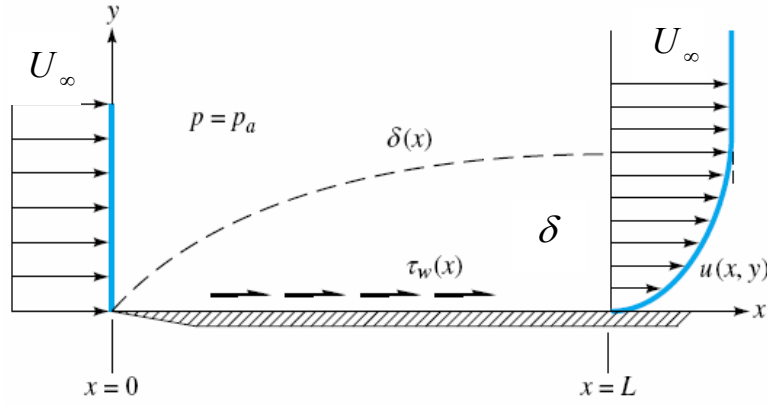
منحنى تغيرات السرعة بين هذين السطحين :



$$u(y) = -\frac{Ch^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

سماعة الطبقة الحدودية – Boundary Layer Thickness

تعتبر سماعة الطبقة الحدودية من أهم العوامل في نظرية الطبقة الحدودية ، و نبدأ تعين سماعة هذه



Growth of a boundary layer on a flat plate.

الطبقة من أبسط الطرق التقريبية و هي :

تغيرات الضغط قليلة جداً إذن :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

سرعة السائل فقط في جهة المحور x

$$V = 0$$

سرعة السائل في جهة محور x متغيرة

تصبح معادلة نافير- ستوكس في جهة المحور x بهذا الشكل :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} U \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_\infty^2}{L} \\ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \approx \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}}$$

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}}$$

في هذه الرابطة $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ و δ سماعة الطبقة الحدودية ، U_∞ سرعة السائل على الخطوط الإنسيابية

خارج الطبقة الحدودية . و Re_L عدد رينولدز مُميزة الطول فيه L

إذا فرضنا سماكة الطبقة الحدودية δ و عرض الصفحة b و سرعة السائل u سرعة السائل داخل هذه الطبقة الحدودية ، و U_∞ سرعة السائل خارج الطبقة الحدودية . القوة المؤثرة الناتجة من حفظ كمية الحركة :

$$D(x) = \rho b \int_0^\delta U_\infty (U_\infty - u) dy$$

توجد معادلة تعرف بمعادلة كارمان (Karman) لسماكة كمية الحركة (Momentum thickness) المعادلة هي :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

القوة الناتجة من كمية الحركة لهذه السماكة :

$$D(x) = \rho b U_\infty^2 \theta$$

نعلم إجهاد القص داخل الطبقة الحدودية هو نتيجة تغير السرعة بالنسبة للفاصلة العمودية و هذا الإجهاد يولد قوة تساوي :

$$\left. \begin{aligned} D(x) &= b \int_0^x \tau dx \Rightarrow \frac{dD}{dx} = b \tau \\ D(x) &= \rho b U_\infty^2 \theta \Rightarrow \frac{dD}{dx} = \rho b U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

منحني تغيرات السرعة داخل الطبقة الحدودية تقريباً يخضع للمعادلة التي فرضها كارمان و هي :

$$u(y) = U_\infty \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad , \quad 0 \leq y \leq \delta$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \Rightarrow \theta = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \left(1 - \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)\right) dy \approx \frac{2}{15} \delta$$

$$\theta \approx \frac{2}{15} \delta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$$

إجهاد القصّ :

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow \tau \approx \frac{2\mu U_\infty}{\delta} \quad \text{متوسط الفاصلة}$$

إذن :

$$\tau \approx \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{2\mu U_\infty}{\delta} \approx \rho U_\infty^2 \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow \delta d\delta \approx \frac{15\nu}{U_\infty} dx$$

الشرائط الحدّية :

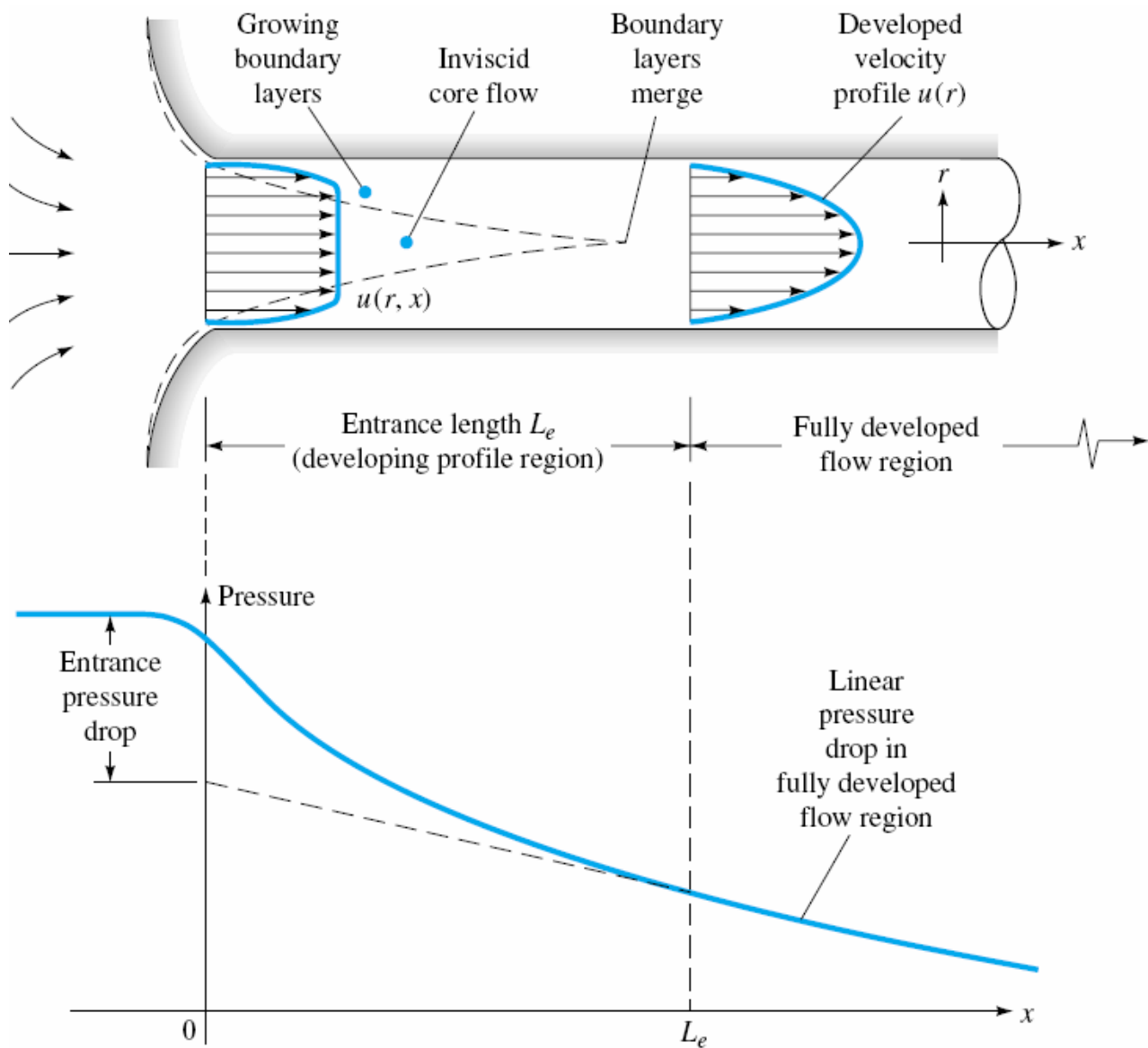
$$x = 0, \delta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \delta^2 \approx \frac{15\nu}{U_\infty} x \Rightarrow \frac{\delta}{x} \approx 5.5 \left(\frac{\nu}{U_\infty \cdot x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

سماكة الطبقة الحدودية بالنسبة الى الفاصلة من الحافة الأمامية للطبقة الحدودية . Re_x عدد رينولدز

مُميزة الطول فيه الفاصلة x

فاصلة الطبقة الحدودية داخل قناة أو أنبوب

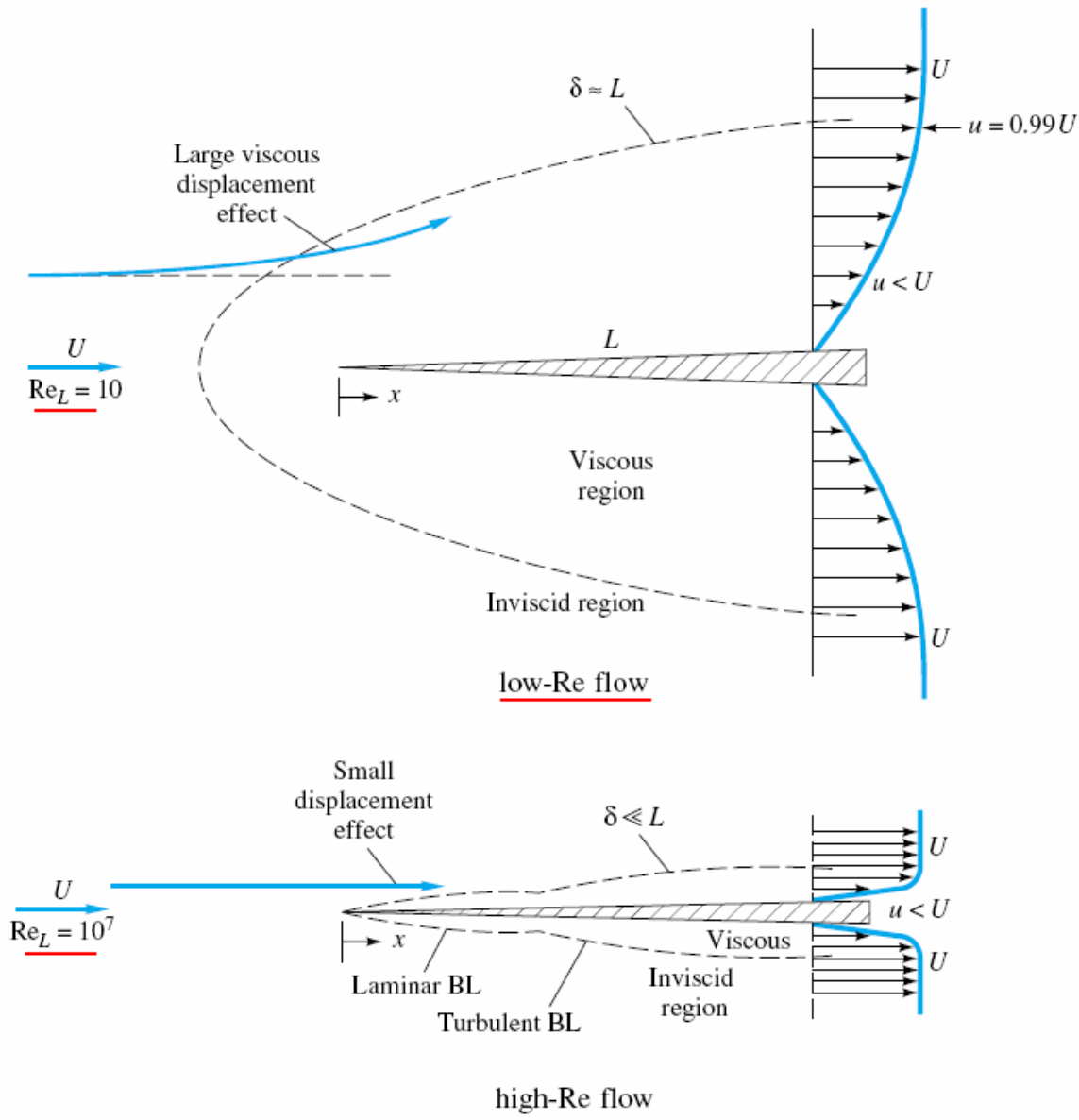


Developing velocity profiles and pressure changes in the entrance of a duct flow.

$$\frac{L_e}{d} \approx 0.06 \text{Re} \quad \text{في الناحية الرقائقية} \quad \text{Laminar}$$

$$\frac{L_e}{d} \approx 4.4\sqrt[6]{\text{Re}} \quad \text{في الناحية المضطربة} \quad \text{Turbulent}$$

أثر عدد رينولدز على سماكة و فاصلة الطبقة الحدودية



Comparison of flow past a sharp flat plate at low and high Reynolds numbers

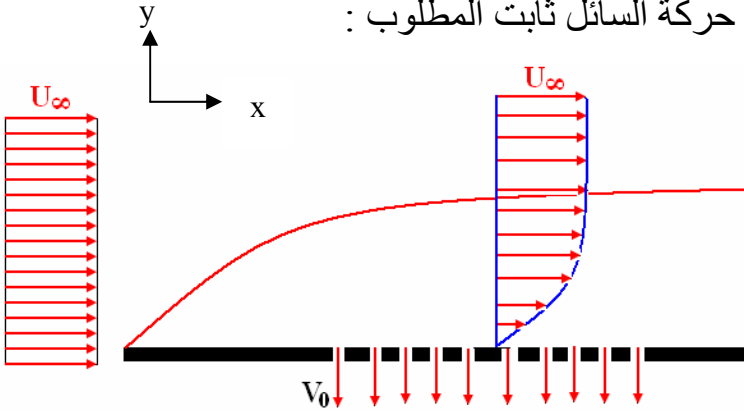
$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{في الناحية الرقائقية} \quad \text{Laminar}$$

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{\sqrt[3]{Re_x}} \quad \text{في الناحية المضطربة} \quad \text{Turbulent}$$

مثال : طبقة حدودية رقائقية كما في الشكل نتيجة حركة سائل بسرعة U_∞ بموازاة سطح صفحة ذات

ثقوب يخرج منها السائل بسرعة v_0 بحيث $\frac{v_0}{U_\infty} \ll 1$ (أي سرعة v_0 الى U_∞ قليلة جداً)

سرعة السائل على سطح الصفحة بعيداً عن مصدر حركة السائل ثابت المطلوب :



1- توزيع السرعة داخل الطبقة الحدودية

2- سُمك الطبقة الحدودية

3- معامل الإحتكاك الموضعي على السطح

من معادلة حفظ الكتلة :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{لأن السرعة ثابتة} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow V = -v_0$$

من معادلة نافير- ستوكس في جهة محور x

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

بما أن تغيرات سرعة السائل في جهة المحور x في الناحية الزرقاء ثابتة إذن $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ و

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \text{و} \quad V = -v_0 \quad \text{كذلك تغيرات الضغط ثابت أي} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{مع العلم} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{لذلك :}$$

$$-v_0 \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

جواب المعادلة التفاضلية هو $U = \frac{A}{v_0} e^{-\frac{v_0}{v}y} + \frac{B}{v_0}$ و A و B ثوابت التكاملات

الشروط الحدية لهذه المعادلة :

$$y = 0 \Rightarrow U = 0$$

$$y = \infty \Rightarrow U = U_\infty$$

إذن توزيع السرعة داخل الطبقة الحثودية هذه هو :

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - e^{-\frac{v_0}{v}y}$$

لتعين سُمك هذه الطبقة الحثودية نستعمل $^1 0.99 = \frac{U}{U_\infty}$ لهذا :

$$0.99 = 1 - e^{-\frac{v_0}{v}\delta} \Rightarrow \delta = 4.6 \frac{v}{v_0} \quad v \text{ اللزوجة الكينماتيكية ، } v_0 \text{ السرعة الخارجة من الصفحة}$$

$$\delta = 4.6 \frac{v}{v_0}$$

معامل الإحتكاك الموضعي على السطح

إجهاد القصّ على السطح يساوي

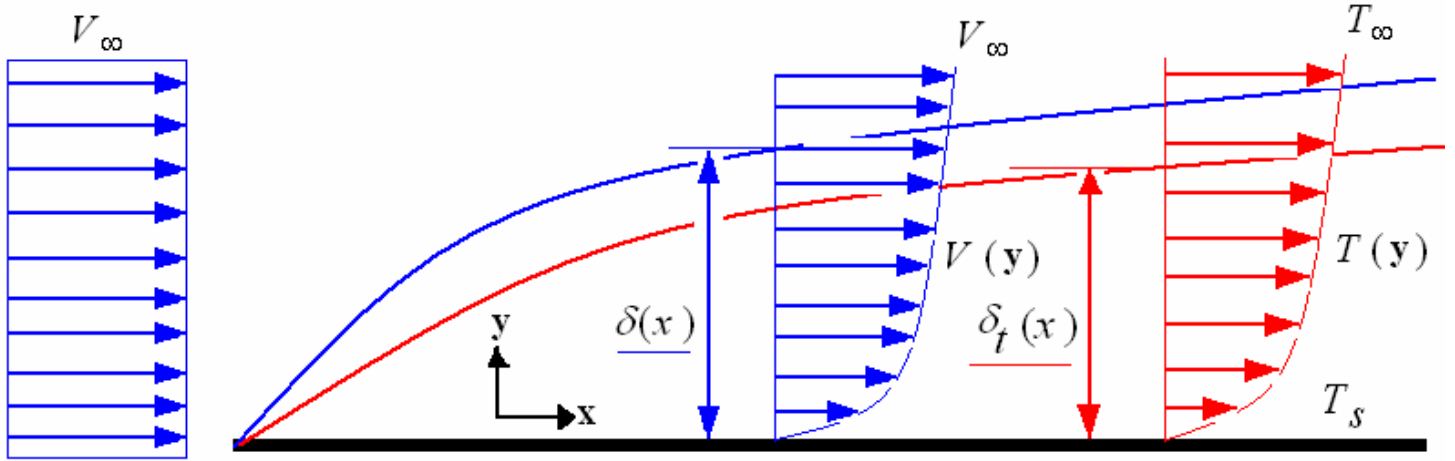
$$\tau = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \Rightarrow \tau = \mu \frac{v_0 \times U_\infty}{v}$$

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho U_\infty^2} \text{ و معامل الإحتكاك يساوي}$$

إذن :

$$C_f = \frac{2v_0}{U_\infty}$$

الطبقة الحدودية الحرارية – Thermal boundary layer



$\delta(x)$ سُمك الطبقة الحدودية الهيدرودينامية، $\delta_t(x)$ سُمك الطبقة الحدودية الحرارية، T_∞ درجة الحرارة خارج الطبقة الحدودية، V_∞ سرعة السريان خارج الطبقة الحدودية، $V(y)$ سرعة السريان داخل الطبقة الحدودية الهيدرودينامية، T_s درجة حرارة سطح الصفحة، T_∞ درجة الحرارة خارج الطبقة الحدودية، $T(y)$ درجة الحرارة داخل الطبقة الحدودية الحرارية.

سُمك الطبقة الحدودية الحرارية بالنسبة للهيدرودينامية :

$$\frac{\delta_t(x)}{\delta(x)} = \frac{1}{1.026 \times \sqrt[3]{Pr}}$$

توزيع درجة الحرارة داخل الطبقة الحدودية الحرارية :

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3$$

في هذا القانون Pr عدد برانتل (Prandtl number) و يساوي :

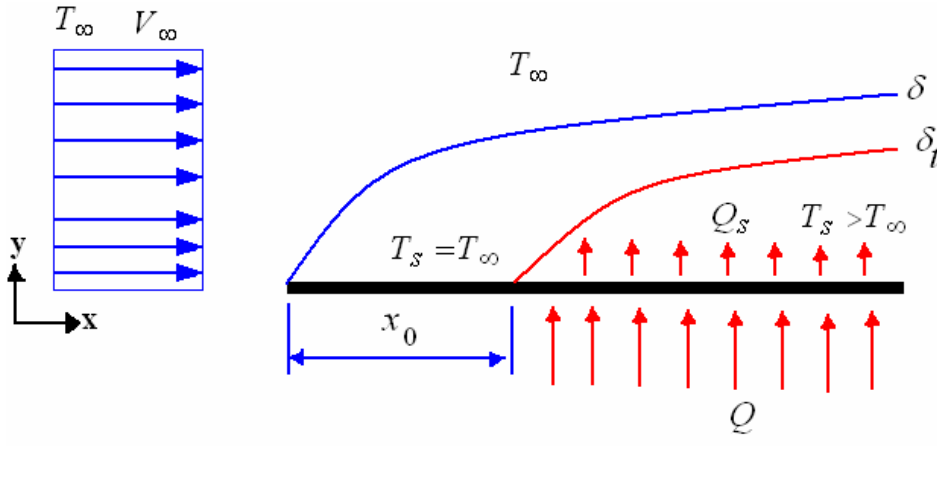
$$Pr = \frac{C_p \mu}{k} \quad , \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ اللزوجة الكينماتية ($\frac{m^2}{sec}$) و μ اللزوجة الديناميكية، ρ الكثافة

$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ الإنتشار الحراري ($\frac{m^2}{sec}$)، k الموصلية الحرارية، C_p السعة الحرارية

الطبقة الحدودية الحرارية هي في ناحية من الطبقة الحدودية الهيدرودينامية التي يوجد فيها تدرج الحرارة (thermal gradient) تغير درجة الحرارة مع الفاصلة ، هذا التدرج هو نتيجة التبادل الحراري بين السائل و الطبقة (أو السطح أو الجدار)

التبادل الحراري في الطبقة الحدودية الحرارية بهذا الشكل :



V_{∞} سرعة السائل و T_{∞} درجة حرارة السائل خارجة الطبقة الحدودية

Q الحرارة المغطاة للسطح تبدأ من الفاصلة x_0 من المقدمة الأمامية للسطح Q_s الحرارة المنتقلة داخل الطبقة الحدودية و درجة حرارة السطح في هذه الناحية T_s

إنتقال الحرارة في الحمل الحراري $Q = hA(T_s - T_{\infty})$ في هذه الرابطة h معامل إنتقال الحرارة و A مساحة السطح و T_s درجة حرارة السطح و T_{∞} درجة حرارة السائل .

نسبة سماكة الطبقتين الحدوديتين :

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026 \times \sqrt[3]{Pr}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

عدد نوسلت¹ (Nusselt number) :

$$Nu_x = 0.332 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{-1}{3}}$$

إذا كانت الفاصلة $x_0 = 0$ أي إنتقال الحرارة لكل سطح الصفحة ، معامل إنتقال الحرارة يساوي:

$$h_x = \frac{0.332}{x} k_f \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}$$

k_f معامل التوصيلية الحرارية للسائل $(\frac{W}{m \cdot C})$ و h معامل إنتقال الحرارة $(\frac{W}{m^2 \cdot C})$






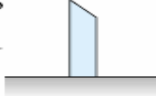





1- عدد نوسلت عدد لا بُعدي نسبة معامل الحمل الحراري الى التوصيلية الحرارية $Nu_L = \frac{hL}{k_f}$











قوة الإعاقة – Darg Force

هي القوة المؤثرة التي تنتج عن الحركة النسبية بين الجسم و السائل إذا كان معامل الإعاقة C_D فقوة الإعاقة الناتجة من هذه الحركة تساوي :

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A V^2$$

في هذه الرابطة ρ كثافة السائل ، و A سطح الجسم الذي في معرض الحركة ، و V سرعة الجسم أو السائل . يرتبط معامل الإعاقة بالشكل الهندسي للجسم و كيفية إستقراره أمام حركة السائل ، يمكن إستخراج معامل الإعاقة للأشكال و الأجسام من هذان الجدولان :

Shape	C_D based on frontal area	Shape	C_D based on frontal area	Shape	C_D based on frontal area
Square cylinder:	2.1	Half-cylinder:	1.2	Plate:	2.0
					
	1.6		1.7	Thin plate normal to a wall:	1.4
Half tube:	1.2	Equilateral triangle:	1.6		
				Hexagon:	1.0
	2.3		2.0		0.7

Body	C_D based on frontal area	Body	C_D based on frontal area																					
Cube:	1.07	Cone:	<table border="1"> <tr> <td>θ:</td> <td>10°</td> <td>20°</td> <td>30°</td> <td>40°</td> <td>60°</td> <td>75°</td> <td>90°</td> </tr> <tr> <td>C_D:</td> <td>0.30</td> <td>0.40</td> <td>0.55</td> <td>0.65</td> <td>0.80</td> <td>1.05</td> <td>1.15</td> </tr> </table>	θ :	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°	C_D :	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15					
θ :	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°																	
C_D :	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15																	
																								
	0.81	Short cylinder, laminar flow:	<table border="1"> <tr> <td>L/D:</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>∞</td> </tr> <tr> <td>C_D:</td> <td>0.64</td> <td>0.68</td> <td>0.72</td> <td>0.74</td> <td>0.82</td> <td>0.91</td> <td>0.98</td> <td>1.20</td> </tr> </table>	L/D :	1	2	3	5	10	20	40	∞	C_D :	0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98	1.20			
L/D :	1	2	3	5	10	20	40	∞																
C_D :	0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98	1.20																
	1.4																							
	0.4	Porous parabolic dish [23]:	<table border="1"> <tr> <td>Porosity:</td> <td>0</td> <td>0.1</td> <td>0.2</td> <td>0.3</td> <td>0.4</td> <td>0.5</td> </tr> <tr> <td>C_D:</td> <td>1.42</td> <td>1.33</td> <td>1.20</td> <td>1.05</td> <td>0.95</td> <td>0.82</td> </tr> <tr> <td>C_D:</td> <td>0.95</td> <td>0.92</td> <td>0.90</td> <td>0.86</td> <td>0.83</td> <td>0.80</td> </tr> </table>	Porosity:	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	C_D :	1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82	C_D :	0.95	0.92	0.90	0.86	0.83	0.80
Porosity:	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5																		
C_D :	1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82																		
C_D :	0.95	0.92	0.90	0.86	0.83	0.80																		
Disk:	1.17	Average person:	<table border="1"> <tr> <td>$C_D A$</td> <td>9 ft²</td> <td>1.2 ft²</td> </tr> </table>	$C_D A$	9 ft ²	1.2 ft ²																		
$C_D A$	9 ft ²	1.2 ft ²																						
																								
Parachute (Low porosity):	1.2	Pine and spruce trees [24]:	<table border="1"> <tr> <td>U, m/s:</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>C_D:</td> <td>1.2 ± 0.2</td> <td>1.0 ± 0.2</td> <td>0.7 ± 0.2</td> <td>0.5 ± 0.2</td> </tr> </table>	U , m/s:	10	20	30	40	C_D :	1.2 ± 0.2	1.0 ± 0.2	0.7 ± 0.2	0.5 ± 0.2											
U , m/s:	10	20	30	40																				
C_D :	1.2 ± 0.2	1.0 ± 0.2	0.7 ± 0.2	0.5 ± 0.2																				
																								



موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الإلكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com